

**Titre :** Modélisation et analyse des interactions entre écoulements à surface libre et objets flottants

**Étudiant :** Fabien Wahl (M2 UPMC - fabien.wahl@etu.upmc.fr)

**Encadrement :** Jacques Sainte-Marie & Edwige Godlewski

**Contexte :** La surface libre confère aux écoulements géophysiques un caractère hyperbolique semblable à ce qu'on rencontre en mécanique compressible. Mais dans de nombreuses situations, la surface est limitée par un toit (rivière souterraine, égout, banquise, ...) ou asservie par la dynamique d'un objet flottant (icebergs, bouées, systèmes houlomoteurs, ...). Ainsi en géophysique, l'analyse et la simulation des écoulements partiellement à surface libre soulèvent des questions scientifiques originales de modélisation, d'analyse et de discrétisation qui font l'objet de cette thèse.

**Problème :** L'analyse et la discrétisation des équations de Navier-Stokes ou d'Euler incompressible à surface libre sont très complexes et on est souvent amené à s'intéresser à des modèles simplifiés tels que les équations de Saint-Venant

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hu) &= 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{g}{2}h^2) &= -gh\partial_x z_b, \end{aligned} \quad (1)$$

où  $h(t, x) = \eta - z_b$  est la hauteur du fluide,  $\eta(t, x)$  la cote de la surface libre,  $z_b(x)$  la cote de la topographie du fond,  $g$  l'accélération de pesanteur et  $u(t, x)$  la vitesse horizontale du fluide moyennée selon la direction verticale. Il s'agit d'un système de lois de conservation hyperboliques pouvant être complété par divers termes sources (pluie, frottement, viscosité, infiltration, force de Coriolis). Bien que non-triviale, l'analyse mathématique et numérique des équations de Saint-Venant a été intensivement étudiée dans la littérature [3]. Lorsque l'écoulement est en charge, la cote de la surface libre est limitée par la cote du toit  $z_{\text{top}}(x)$ , voir FIGURE 1. La conservation du volume de fluide est alors réduite à

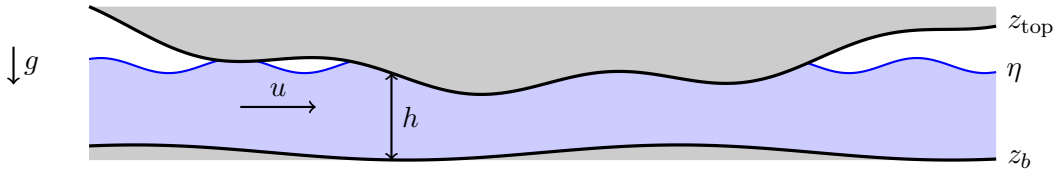


FIGURE 1 – Écoulement partiellement en charge

une contrainte comparable à celle de la mécanique incompressible et une nouvelle inconnue  $p(t, x)$ , représentant la variation de pression à la surface  $\eta$  par rapport à la pression atmosphérique, joue le rôle de multiplicateur de Lagrange [2]. En suivant les règles d'intégration du modèle de Saint-Venant (1), on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hu) &= 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{g}{2}h^2) &= -h\partial_x\left(gz_b + \frac{p}{\varrho}\right), \\ h + z_b \leq z_{\text{top}} \quad (h + z_b - z_{\text{top}})p &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

avec  $\varrho$  la masse volumique du fluide.

Dans le cadre d'un écoulement sous une structure, la cote du toit  $z_{\text{top}}(t, x)$  correspond à la surface inférieure de l'objet et satisfait un modèle de dynamique. Plus précisément, pour une bouée flottante soumise à un système de ressort-amortisseur avec pour seul degré de liberté l'axe vertical, on a  $z_{\text{top}}(t, x) - z_{\text{top}}(0, x) = \xi(t) - \xi_0$  et

$$M\xi'' + C\xi' + k(\xi - \xi_0) + Mg = \int_{\text{bord immergé}} p \, dx, \quad (3)$$

avec  $M$  la masse de la bouée,  $C$  le coefficient d'amortissement et  $k$  la raideur du ressort.

**Difficultés :** La principale difficulté du projet réside dans la différence fondamentale entre la mécanique des écoulements à surface libre, comparable à la mécanique compressible, et la mécanique des écoulements en charge, comparable à la mécanique incompressible. Les méthodes d'analyse et de résolution numérique

classiques sont très différentes pour ces deux cadres. Une autre source de difficulté est d'assurer la conservation d'énergie du système couplé fluide/structure. Des méthodes numériques existent pour chaque partie, fluide ou structure mais nécessitent une discrétisation particulière des termes d'échange. Cette propriété de conservation joue un rôle essentiel dans notre étude. Du point de vue mathématique, elle sert d'argument de stabilité pour les solutions en temps long. Du point de vue des applications, l'estimation de l'énergie est primordiale afin d'optimiser les dispositifs de récupération d'énergie marine.

**Etat de l'art :** Des travaux existent dans le domaine de l'hydrodynamique navale [4], et des modèles de Navier-Stokes diphasiques [5]. Ces travaux seront à explorer et à relier aux objectifs de la présente thèse.

**Programme de recherche :** Dans un premier temps, on s'intéressera à l'analyse et la résolution numérique du modèle (2). Le modèle sort du cadre des équations hyperboliques du fait de la contrainte de hauteur maximale. On propose une analyse via un nouveau modèle sans contrainte mais en remplaçant le terme de pression surfacique par un terme de rappel de la cote de la surface libre vers la cote du toit. L'analyse par cette méthode se décompose en deux étapes, premièrement une analyse asymptotique lorsque le paramètre de pénalisation s'annule, puis une analyse du modèle régularisé à l'aide des méthodes classiques pour les équations hyperboliques. Une méthode numérique sera proposée en s'inspirant du modèle régularisé introduit pour l'analyse. Une seconde méthode de résolution, dite de prédiction-correction, consiste à approcher la solution par une étape sans contrainte, puis à projeter la solution sur l'ensemble des fonctions satisfaisant la contrainte. Dans un second temps, on s'intéressera à la dynamique de la structure. Les degrés de liberté de la structure seront ajoutés progressivement et des systèmes dynamiques de structures indéformables articulées, tel que le Pelamis<sup>1</sup>, seront également considérés. Des solutions analytiques, en particulier les états stationnaires, seront construites en suivant la stratégie proposée dans [1] afin de valider la résolution numérique.

Dans la suite de la thèse, l'étudiant pourra s'orienter vers une complexification du modèle afin de mieux décrire la physique. Plusieurs améliorations pourront être proposées : prise en compte des effets non-hydrostatiques à proximité de la structure, prise en compte de la variation de vitesse suivant la verticale à l'aide d'un modèle multi-couche, prise en compte d'une mécanique déformable. L'ouverture vers d'autres modèles d'écoulement que les équations de Saint-Venant sera envisagée pour un traitement plus précis de la houle.

Les techniques numériques développées pendant la thèse seront intégrées dans les outils numériques de résolution des équations de Navier-Stokes à surface libre développés au LJLL (Freshkiss3d).

Le travail de thèse s'effectuera au sein d'un groupe de travail contenant notamment les deux encadrants et également Cindy Guichard et Martin Parisot.

## Références

- [1] BOULANGER, A.-C., BRISTEAU, M.-O., AND SAINTE-MARIE, J. Analytical solutions for the free surface hydrostatic Euler equations. *Communications in Mathematical Sciences* 11, 4 (2013), 993–1010.
- [2] P.L. LIONS, N. MASMOUDI, On the free boundary barotropic model, *Annales de l'IHP*, 1999.
- [3] BOUCHUT, F. Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources, *Birkhäuser*, 2004.
- [4] M. LAZO, C. GARCIA BAUZA, G. BORONI AND A. CLAUSSE Real-Time Physical Engine for Floating Objects with Two-Way Fluid-Structure Coupling. *World Applied Sciences Journal*, 22(12), 2013, 1685–1694.
- [5] A. BERNARD-CHAMPARTIN AND F. DE VUYST A low diffusive Lagrange-remap scheme for the simulation of violent air-water free-surface flows. *J. Comp. Phys*, 274, 2014, 19–49.

---

1. <http://www.ecosources.info/dossiers/Pelamis.energie.vague>