

# Modèles fluide intégrés selon la verticale

Encadrants : Nina Aguillon (nina.aguillon@upmc.fr), Martin Parisot (martin.parisot@inria.fr)  
Responsable d'équipe : Jacques Sainte-Marie (Jacques.Sainte-Marie@inria.fr)

## 1 L'équipe INRIA-UPMC ANGE

L'équipe ANGE (Analyse Numérique, Géophysique et Écologie) travaille sur la modélisation, l'analyse et l'approximation numérique de flots géophysiques complexes. Dans ce cadre, vue l'importance croissante de tels écoulements fluide dans les questions de développement durable et d'énergies nouvelles, il est crucial de considérer des modèles plus complets que les équations de Saint Venant.

Pour décrire l'évolution d'un fluide incompressible non visqueux, on dispose de différents modèles, chacun ayant un domaine de validité et une complexité propre. D'un côté du spectre, on a les équations d'Euler à surface libre, qui sont très générales mais complexes à simuler (changement de topologie et enroulement de vagues, 4 inconnues, 3D, et contrainte d'incompressibilité). De l'autre, les équations de Saint Venant qui sont bien plus simples (3 inconnues, 2D, pas de contrainte) mais dont le domaine de validité est limité. Le modèle de Saint Venant discrétisé par couches utilisé dans l'équipe ANGE est un intermédiaire entre ces deux modèles, qui a fait ses preuves dans différents cas d'intérêt.

## 2 Perspectives de recherche

Dans ce stage de M2 on propose d'explorer les liens entre le modèle de Benney et le modèle de Saint Venant discrétisé par couches [1] utilisé dans l'équipe ANGE. Le modèle de Benney [2] s'obtient à partir des équations d'Euler à surface libre, en faisant l'hypothèse que la surface peut être paramétrisée par une fonction et en intégrant le long de la verticale. On obtient un système de deux EDPs, l'une étant non locale. Le modèle discrétisé par couches peut être interprété comme une approximation du modèle de Benney, en remplaçant l'intégrale par une somme de Riemann.

Les buts de ce stage sont de comprendre les liens entre les deux domaines et d'étudier les résultats d'hyperbolicité sur le modèle de Benney. Si le temps le permet, on pourra explorer si ces résultats peuvent fournir des renseignements sur l'hyperbolicité du modèle à  $N$  couches (question actuellement ouverte).

Il est également être intéressant de s'intéresser à l'approximation numérique du modèle multicouche, et en particulier au traitement des termes d'échanges selon la verticale. En effet, un travail récent [3] de l'équipe a permis de dégager des solutions exactes nouvelles pour le modèle à 2 couches, et des travaux préliminaires semblent indiquer que les schémas disponibles jusqu'ici ne les capturent pas correctement. Un défi de cette piste est de proposer un schéma qui puisse fonctionner pour un nombre quelconque de couches.

## 3 Profil recherché

Ce stage de M2 s'adresse à des étudiant-e-s en mathématiques appliquées ayant des connaissances en modélisation, en calcul scientifique ou en mécanique des fluides. Des connaissances en équations hyperboliques seront un atout. Selon le profil de la personne retenue et ses goûts, on mettra l'accent sur l'analyse du modèle continu ou sur celle des schémas numériques. Ce stage pourra éventuellement se poursuivre par une thèse.

## Références

- [1] E. Audusse, M.-O. Bristeau, B. Perthame et J. Sainte-Marie *A Multilayer Saint Venant System with Mass Exchanges for Shallow Water Flows. Derivation and Numerical Validation*. 2011. *M2AN*
- [2] D. J. Benney *Some Properties of Long Nonlinear Waves*. 1973. *Studies in Applied Mathematics*
- [3] N. Aguillon, E. Audusse, E. Godlewki et M. Parisot *Analysis of the Riemann Problem for a shallow water model with two velocities*. 2017. *Prépublication*