1 – Prérequis

Les prérequis pour cet APP sont les acquis de l'APP précédente et du premier semestre : étude de fonction, fonctions usuelles, dérivation, intégration et primitives.

2 – Objectifs pédagogiques de l'APP2

A l'issue de cet APP, l'étudiant devra savoir :

- identifier le type d'une équation différentielle (linéaire ou pas, ordre, à variables séparées ou pas)
- résoudre les équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre
- appliquer la méthode de variation de la constante pour résoudre les équations linéaires du premier ordre avec second membre
- appliquer un changement de fonction inconnue pour résoudre une équation différentielle non linéaire

3 – Présentation du problème

On s'intéresse ici à l'évolution de la population terrestre. L'étude de cette évolution nécessite l'étude et la résolution de différentes équations différentielles. On verra que cette évolution peut être affectée aussi bien par des limitations du milieu à soutenir une croissance exponentielle que par une invasion extra-terrestre. Cette étude rentre dans le cadre de la *dynamique des populations*[1].

On considère une population dont l'effectif au cours du temps est représenté par une fonction réelle $y(t)$. On modélise l'évolution de cette population par l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = a(t)y(t) - b(t)y^2(t) + c(t)$$

- $a(t)$ représente le taux d'accroissement naturel de la population. Il est égal au taux de natalité moins le taux de mortalité.
- $b(t)$ représente la capacité du milieu à soutenir la croissance de la population (limitation des ressources, découverte de nouvelles terres agricoles, etc.).
- $c(t)$ représente la variation de la population due à un phénomène de migration (immigration, émigration, départ saisonnier en vacances, etc.).

Etapes du travail

Vous distinguerez trois situations différentes :

1. Cas $b(t) = 0$, $c(t) = 0$: la planète Terre est isolée, sans migration.
2. Cas $b(t) \neq 0$, $c(t) = 0$: amélioration du modèle pour tenir compte des limitations du milieu à soutenir une croissance exponentielle.
3. Cas $b(t) = 0$, avec $c(t) \neq 0$: La planète Terre est envahie et les *Men In Black* vont avoir beaucoup de travail.

1. La dynamique des populations s'intéresse au développement numérique de toutes les populations d'êtres vivants

Description des trois situations

Situation (1) – cas de la planète Terre isolée, sans migration. Lorsqu'on regarde l'évolution de la population à l'échelle de la planète, le terme $c(t)$ vaut zéro puisqu'il n'y a pas de phénomène de migration vers une autre planète. C'est également le cas pour un territoire isolé, pour lequel le terme de migration est négligeable. L'évolution de la population est donc guidée par l'équation :

$$y'(t) = a(t)y(t)$$

Le taux d'accroissement naturel $a(t)$ est classiquement modélisé de deux manières différentes :

(a) Soit il est supposé que le taux de natalité et le taux de mortalité sont constants, et donc le taux d'accroissement naturel $a(t)$ est constant en fonction du temps.

(b) Soit on se trouve dans une situation de transition démographique. Les évolutions des taux de natalité, mortalité et accroissement sont alors donnés dans la figure 1. Dans ce cas, $a(t)$ est une fonction du temps et peut être décrite par la fonction suivante :

$$a(t) = \frac{0.05}{1 + (\frac{t-50}{15})^2},$$

où t est le nombre d'années depuis le début de la transition.

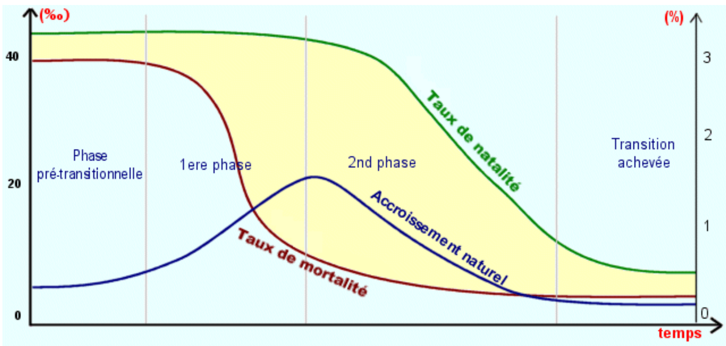

Figure 1 – Illustration du phénomène de transition démographique

Indications numériques Pour l'application numérique, on utilisera les valeurs suivantes :

- En 1965, on estimait la taille de la population humaine à $y_{1965} = 3.34$ milliards.
- En 2014, elle est estimée à 7 milliards.
- Le taux d'accroissement annuel moyen est estimé à 2.9%.

Situation (2) - prise en compte des limitations du territoire. Le défaut majeur de la modélisation précédente est qu'elle ne tient pas compte de la capacité du milieu à soutenir la croissance de la population. On introduit donc le terme supplémentaire en $b(t)$. Ce terme peut expliquer par exemple le fait que les ressources sont limitées, ou que le progrès technique va au contraire accroître les ressources disponibles. La population est alors décrite par l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = a(t)y(t) - b(t)y^2(t) \tag{1}$$

Trois situations sont considérées ici :

(a) $a(t) = a$ et $b(t) = b$ sont constants.

(b) Situation de catastrophe :

– le taux d'accroissement naturel diminue en fonction du temps (baisse du taux de natalité, et hausse du taux de mortalité). On se propose de le modéliser par une fonction décroissante :

$$a(t) = 0.029\left(1 - \frac{t}{60}\right),$$

où t est le nombre d'années depuis le début de la catastrophe.

– les ressources diminuent en fonction du temps. Ainsi, $b(t)$ est une fonction croissante qu'on se propose de modéliser par :

$$b(t) = \frac{t}{20}\exp\left(0.029\frac{t^2}{120}\right)$$

(c) Situation de pleine croissance : le taux de natalité augmente, le taux de mortalité diminue, et des progrès techniques permettent l'accès à de nouvelles ressources. On vous demande de proposer des fonctions $a(t)$ et $b(t)$ afin de modéliser cette situation.

Situation (3) – Migration extraterrestre. Malheureusement, la Terre est très attractive... pour les extraterrestres ! Ceux-ci ont décidé de venir nombreux et les *Men In Black* vont devoir réguler la situation. On suppose ici que la migration extraterrestre intervient à un moment où la Terre est en parfaite harmonie, où l'on a maîtrisé des sources d'énergies illimitées. Cela se traduit par le fait que le terme $b(t)$ est nul.

L'évolution de la population est alors guidée par l'équation :

$$y'(t) = a(t)y(t) + c(t) \tag{2}$$

Dans ce travail, on considère que la Terre est très attractive, que le terme de migration est modélisé par $c(t) = t$ et que la Terre n'est pas en situation de transition démographique (a est constant).

Indications numériques Pour l'application numérique, on utilisera la valeur suivante :

– la taille initiale de la population terrestre est de 7 milliards.