Analyse numérique : Résolution numérique des équations différentielles

Pagora 1A

Chapitre 6

22 mars 2013

Grenoble INP Pagora

Plan

Plan

Où trouver des équations différentielles

En fait, on trouve des équations différentielles un peu partout :

- physique (ex : pendule, équation de la châleur, ...)
- chimie (ex : cinétique chimique, ...)
- biologie (ex : dynamique de populations, ...)
- économie (ex : dynamique de croissance exponentielle, ...)

Comment les résoudre

Voici un exemple simple d'équations différentielles

$$y'(t) + \alpha y(t) = 0$$

Les solutions de cette équations sont de la forme

$$y(t) = Ke^{-\alpha t} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

Maintenant

$$y'(t) + \alpha y(t) = f(t)$$

avec une fonction f quelconque.

Cette équation n'admet pas forcément de solution explicite d'où la nécessité d'utiliser des méthodes numériques pour résoudre ce problème.

Plan

Quelques théorèmes

Formule de Taylor-Lagrange :

Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a, b]$. Alors il existe un réel ξ dans $[a, b]$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit une fonction f continue sur l'intervalle $[a, b]$ alors, pour tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel ξ dans $[a, b]$ tel que $f(\xi) = u$.

Position du problème

On possède une fonction f suffisamment dérivable sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ seulement connue de façon discrète en plusieurs points x_i, $i = 0, \ldots, n$.

On suppose que les x_i sont régulièrement espacés :

$$x_i = a + ih \qquad \text{avec} \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

Exercice introductif : Utiliser les formules de Taylor afin de donner une approximation de $f'(x_0)$ en utilisant les $f(x_i)$ seules valeurs de f connues. Quelle est l'erreur (écart entre la vraie valeur et l'estimation) commise pour cette estimation ?

Correction

Correction

On utilise la formule de Taylor-Lagrange en $x_1 = x_0 + h$, on a

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_1) \qquad \xi_1 \in [x_0, x_0 + h]$$

d'où

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi_1)$$

Une approximation de $f'(x_0)$ est donc

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

et l'erreur commise est

$$-\frac{h}{2} f''(\xi_1)$$

Formules à deux points pour la dérivée

On cherche à approcher $f'(x_1)$ en utilisant 2 points $f(x_i)$. Plusieurs approximations sont possibles, par exemple

$$\begin{cases} f'(x_1) \approx \dfrac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} & \text{approximation de la dérivée en } x_1 \\ E = -\dfrac{h}{2}f''(\xi_1) & \xi_1 \in [x_1, x_1+h] \text{ erreur commise} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(x_1) \approx \dfrac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h} & \text{approximation de la dérivée en } x_1 \\ E = \dfrac{h}{2}f''(\xi_2) & \xi_2 \in [x_1-h, x_1] \text{ erreur commise} \end{cases}$$

L'erreur commise à chaque fois tend vers 0 comme h. E est une fonction de $h = h^1$, l'approximation est donc dite d'**ordre** 1.

Approximation d'ordre 2 pour la dérivée

On utilise la formule de Taylor-Lagrange en $x_2 = x_1 + h$ et en $x_0 = x_1 - h$, on a

$$f(x_1 + h) = f(x_1) + hf'(x_1) + \frac{h^2}{2} f''(x_1) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(\xi_1) \qquad \xi_1 \in [x_1, x_1 + h]$$

$$f(x_1 - h) = f(x_1) - hf'(x_1) + \frac{h^2}{2} f''(x_1) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(\xi_2) \qquad \xi_2 \in [x_1 - h, x_1]$$

En soustrayant membre à membre, on obtient

$$f(x_1 + h) - f(x_1 - h) = 2hf'(x_1) + \frac{h^3}{6}(f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2))$$

Approximation d'ordre 2 pour la dérivée

Formule centrée

$$\begin{cases} f'(x_1) & \approx & \dfrac{f(x_1+h)-f(x_1-h)}{2h} & \text{approximation de la dérivée en } x_1 \\ E & = & -\dfrac{h^2}{12}(f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)) & \xi_1 \in [x_1, x_1+h],\ \xi_2 \in [x_1-h, x_1] \end{cases}$$

L'estimation de l'erreur se simplifie en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires (on peut ici car on suppose f suffisamment dérivable). En effet, il existe ξ dans $[x_1-h, x_1+h]$ tel que

$$-\frac{h^2}{12}(f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)) = -\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi)$$

La formule centrée est d'**ordre** 2 donc plus précises que les deux premières formules même si elle nécessite la connaissance de f au même nombre de points.

Approximation de la dérivée seconde

Exercice : trouver une formule d'ordre 2 pour le calcul de la dérivée seconde $f''(x_1)$. Que vaut l'erreur commise ?

Correction

Correction

On procède de la même manière que pour la dérivée première, on a ainsi

$$f(x_1+h) = f(x_1) + hf'(x_1) + \frac{h^2}{2}f''(x_1) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x_1) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_1)$$

$$f(x_1-h) = f(x_1) - hf'(x_1) + \frac{h^2}{2}f''(x_1) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x_1) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_2)$$

avec $\xi_1 \in [x_1, x_1+h]$ et $x_2 \in [x_1-h, x_1]$. En additionnant, on a

$$f(x_1+h) + f(x_1-h) = 2f(x_1) + h^2 f''(x_1) + \frac{h^4}{24}(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2))$$

Correction

On obtient ainsi le résultat suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} f''(x_1) & \approx & \dfrac{f(x_1+h)-2f(x_1)+f(x_1-h)}{h^2} \\ E & = & -\dfrac{h^2}{24}(f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)) \end{array}\right.$$

L'estimation de l'erreur se simplifie en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires (on peut ici car on suppose f suffisamment dérivable). En effet, il existe ξ dans $[x_1-h, x_1+h]$ tel que

$$-\frac{h^2}{24}(f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)) = -\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$$

Cette formule est d'ordre 2.

Plan

Étude de cas

On illustre la méthode sur un exemple particulier, la résolution du problème

$$\left\{\begin{array}{rcll} -u''(x)+c(x)u(x) & = & f(x) & x \in]0,1[\\ u(0) & = & \alpha & \\ u(1) & = & \beta & \end{array}\right.$$

avec

- f fonction continue sur $[0,1]$
- c fonction continue sur $[0,1]$ avec $c(x) \geq 0$.

On suppose que le problème admet une unique solution u dans $\mathcal{C}^2([0,1])$.

Principe de la méthode : maillage

On subdivise de façon régulière l'intervalle $[0, 1]$. On appelle $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n+1$ les points de la subdivision.

Vocabulaire :

- La subdivision est appelée **maillage** uniforme de $[0, 1]$
- Les points x_i sont les **nœuds** du maillage
- $h = \dfrac{1}{n+1}$ est le **pas** du maillage

Le nombre de nœuds du maillage (soit $n+2$) est destiné à tendre vers l'infini et donc h vers 0.

Principe de la méthode

Notons $u_i = u(x_i)$.

$u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = \beta$ permettent de vérifier les conditions limites.

Il reste à trouver u_i, $i = 1, \dots n$. Ecrivons l'équation différentielle du problème en x_i :

$$-u''(x_i) + c(x_i)u(x_i) = f(x_i)$$

Comme les fonctions c et f sont données, on peut calculer $c(x_i) = c_i$ et $f(x_i) = f_i$.

Principe de la méthode : dérivée seconde

On a vu précédemment que l'on pouvait approcher la dérivée seconde d'une fonction en un point donné à l'aide de la formule

$$u''(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi) \qquad \xi \in [x_i - h, x_i + h]$$

On a facilement que

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| -u''(x_i) - \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \right) \right| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|$$

Le membre de droite dans l'inégailté s'appelle l'**erreur de consistance**.

Principe de la méthode : système à résoudre

Exercice : Établir le système à résoudre pour trouver les u_i, $i = 1, \ldots, n$.

Correction

Correction

On a que

$$
\begin{aligned}
\frac{-u_2 + 2u_1 - u_0}{h^2} + c_1 u_1 &= f_1 \\
\frac{-u_3 + 2u_2 - u_1}{h^2} + c_2 u_2 &= f_2 \\
&\cdots \\
\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} + c_i u_i &= f_i \\
&\cdots \\
\frac{-u_{n+1} + 2u_n - u_{n-1}}{h^2} + c_n u_n &= f_n
\end{aligned}
$$

Correction

Ce qui donne le système suivant à résoudre

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+c_1h^2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2+c_2h^2 & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & 2+c_3h^2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2+c_nh^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$