TD 2 : Résolution de systèmes linéaires et d'équations différentielles

1 Résolution de systèmes linéaires

Exercice 1 *Compléter l'ossature du code fournie afin que le programme résolve le système* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *(avec* $\mathbf{A}$ *matrice carrée de taille* $m \times m$*) en utilisant la méthode de Jacobi.*

```
function [x] = Jacobi(A,b,x0,m,n)

   // on veut resoudre Ax = b en construisant une suite initialisee par x0
   // la matrice A est de taille m x m
   // on fait n iterations

   // remplir la matrice M (exemple pour le produit matriciel S*T)
   ........................
   Minv = M^(-1) ; // Minv contient la matrice inverse de M

   // remplir la matrice N
   ........................

   x = x0 ;
   for k = 1:n
      x = ........................
   end

endfunction
```

Exercice 2 *Voici 2 matrices décomposées de la manière suivante (on ne demande pas de vérifier l'égalité)*

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -9 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -7 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 21 & 3 \\ 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{10} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 21 & 3 \\ 0 & \frac{15}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{10} \end{pmatrix}$$

1. *Sous quelles formes sont décomposées les matrices suivantes ? Justifier.*
2. *Quel est le rang de chaque matrice ? Justifier*

3. *Résoudre les systèmes suivants en utilisant les questions précédentes*

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -9 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 21 & 3 \\ 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ -8 \end{pmatrix}$$

2 Résolution d'équations différentielles

Exercice 3 *Soit une fonction $u(x,t)$ solution de l'équation différentielle suivante (équation de la chaleur)*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

avec :

- $t \geq 0$, *variable temporelle*
- x, *variable spatiale comprise entre* 0 *et* 1
- $c > 0$ *coefficient dit de diffusion thermique*
- $u(x,0) = u_0(x)$ *avec* u_0 *fonction connue*
- $u(0,t) = \alpha(t)$ *avec* α *fonction connue*
- $u(1,t) = \beta(t)$ *avec* β *fonction connue*

On veut résoudre de manière numérique cette équation. Pour cela, on subdivise le temps et l'espace (= discrétiser) de la manière suivante

- *pour l'espace,* $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n+1$ *avec* $h = \frac{1}{n+1}$
- *pour le temps,* $t_j = j\Delta t$, *avec* $\Delta t > 0$ *un pas de temps* ***choisi****.*
- *on note* $u_i^j = u(x_i, t_j)$

Les questions suivantes doivent vous permettre de poser le problème discret (version discrète du problème continu, soit passer de x et t aux x_i et t_j) et vous conduire aux systèmes linéaires à résoudre.

1. *Même sans la résolution de l'équation différentielle, on connait déjà un certain nombre de u_i^j. Lesquels ?*

On suppose maintenant qu'on connaisse à un instant t_j donné ***tous*** *les u_i^j, $i = 0, \ldots, n+1$. Par contre, on ne connait pas tous les u_i^{j+1} à l'instant suivant t_{j+1}. Le but des prochaines questions est de pouvoir exprimer les u_i^{j+1} en fonction des u_i^j en discrétisant l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j) - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) = 0$$

*Cette méthode est dite d'**Euler explicite***

2. *Discrétiser le terme suivant $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j)$ en fonction uniquement de u_i^j, u_i^{j+1} et Δt. Quel est l'ordre de l'approximation en temps ?*
3. *Discrétiser le terme suivant $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j)$ en fonction uniquement de u_{i-1}^j, u_i^j, u_{i+1}^j et h.*
   Quel est l'ordre de l'approximation en espace ?

4. *Établir le système à résourdre pour trouver les u_i^{j+1} en fonction des u_i^j.*

On suppose toujours qu'on connaisse à un instant t_j donné ***tous*** *les u_i^j, $i = 0, \ldots, n+1$. On va construire les u_i^{j+1} en fonction des u_i^j en discrétisant l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+1}) - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1}) = 0$$

*Cette méthode est dite d'**Euler implicite***

5. *Discrétiser le terme suivant $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+1})$ en fonction uniquement de u_i^j, u_i^{j+1} et Δt.*
   Quel est l'ordre de l'approximation en temps ?
6. *Discrétiser le terme suivant $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1})$ en fonction uniquement de u_{i-1}^{j+1}, u_i^{j+1}, u_{i+1}^{j+1} et h.*
   Quel est l'ordre de l'approximation en espace ?
7. *Établir le système à résourdre pour trouver les u_i^{j+1} en fonction des u_i^j.*
8. *D'un point de vue pratique, quelle méthode (Euler explicite ou implicite) semble la plus facile à mettre en place ? Détailler votre point de vue.*

3 Extrait de l'examen de 2012

3.1 Représentation des nombres (4 points)

Lors d'un calcul, un ordinateur fournit des réponses approximatives pour des raisons de cardinalité. En effet, il utilise un nombre fini de bits (chiffre binaire c'est à dire 0 ou 1) pour représenter les entiers ou les réels. Pour comprendre comment l'ordinateur effectue ses calculs et éviter les situations pathogènes, il est intéressant de comprendre le calcul en système binaire et la représentation des réels en nombres à virgule flottante.

Question 1 *"There are only 10 types of people in the world : those who understand binary and those who don't." Expliquer la blague.*

Question 2 *Convertir les nombres 12 et 13 en binaire. Effectuer l'addition 12+13 en binaire.*

Question 3 *Comment sont représentés les réels sur un ordinateur ? Quels sont les avantages et les inconvénients d'une telle représentation ? (4 lignes maximum)*

Question 4 *Expliquer les résultats de la session Scilab présentée ci-dessous :*

```
–>
–>a=1
a = 1.
–>b=10ˆ 20
b = 1.000D+20
–>c=-b
c = - 1.000D+20
–>(a+b)+c
ans = 0.
–>a+(b+c)
ans = 1.
```

3.2 Integration (3 points)

Soit g une fonction de [0,1] dans $\mathbb{R}$, en général les méthodes analytiques d'évaluation de $I = \int_0^1 g(x)dx$ se basent sur le calcul d'une primitive de g. Cependant, pour la plupart des fonctions, on ne connaît pas d'expression analytique des primitives. Il est alors intéressant d'utiliser une méthode numérique. On considère la méthode de quadrature de la forme :

$$\int_0^1 g(x)dx \approx g(0) \tag{1}$$

Question 5 *Donner l'interprétation géométrique d'une telle méthode.*

Question 6 *Quelle est le degré de précision de ce schéma ?*

Question 7 *Cette méthode parait-elle intéressante ? Justifier.*

3.3 Méthode itérative du point fixe (3 points)

En analyse numérique, une méthode itérative est un procédé algorithmique. Pour résoudre un problème donné, après le choix d'une valeur initiale considérée comme une première ébauche de solution, la méthode procède par itérations au cours desquelles elle détermine une succession de solutions approximatives raffinées qui se rapprochent graduellement de la solution cherchée.

Par exemple, on cherche à résoudre numériquement l'équation $\cos(x^*) = x^*$ sur [0,1].

Question 8 *Montrer en utilisant le théorème du point fixe que l'itération $x_n = \cos(x_{n-1})$ avec $x_0 \in [0, 1]$ converge vers la solution unique d'une telle équation. On rappelle que $\forall x \in [0, 1], \sin(x) \leq \sin(1) < 1$.*

Question 9 *Compléter l'algorithme qui permet de calculer x_n :*

```
function [ res ] = pointfixe( x0,n )
res=x0;
...............
...............
...............
endfunction
```

Question 10 *On note $e_n = |x_n - x^*|$ l'erreur de la méthode après n itérations. La figure présente l'évolution de e_{n+1}/e_n en fonction de n. Pourquoi est-ce un graphique intéressant ? Pouvait-t-on prédire ce comportement ?*

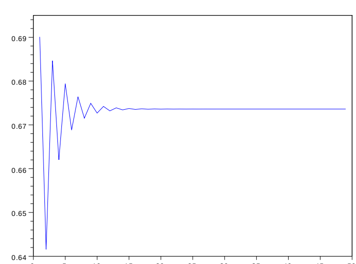

FIG. 1 – **Vitesse de convergence de la méthode du point fixe appliquée à la fonction** $cos(x)$