Analyse numérique : Résolution de systèmes linéaires

Pagora 1A

Chapitre 5

18 mars 2013

Plan

1. Qu'est ce qu'un système linéaire ?
2. Existence et unicité des solutions
3. Calcul de solution

Plan

Système d'équations linéaires

Un système d'équations linéaires est un ensemble d'équations portant sur les mêmes inconnues.

En général, un système de m équations linéaires à n inconnues peut être écrit sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

où x_1, x_2, ..., x_n sont les inconnues.

Forme matricielle d'un système linéaire

Un système d'équations linéaires peut aussi s'écrire sous la forme matricielle

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice de taille $m \times n$, $\mathbf{x}$ est un vecteur de taille n et $\mathbf{b}$ est un vecteur de taille m.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Plan

Cas possibles pour un système linéaire

Soit le système linéaire

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

avec :

- $\mathbf{x}$ vecteur contenant les n variables **réelles** rechérchées.
- $\mathbf{A}$ matrice de taille $m \times n$ contenant des coefficients **réels**.
- $\mathbf{b}$ vecteur contenant m **réels**.

Seulement 3 cas sont possibles pour ce système linéaire :

- Le système n'a pas de solution
- Le système a une solution unique
- Le système a une infinité de solutions

Exercice introductif

A votre avis, les systèmes suivants ont-ils une solution unique, une infinité de solution ou pas de solution ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 6x_2 & = & 4 \\ -4x_1 & - & 12x_2 & = & -8 \end{array}\right. \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & 7 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & - & 3x_2 & = & 14 \\ 16x_1 & - & 12x_2 & = & 2 \end{array}\right. \tag{3}$$

Exercice introductif (correction)

A votre avis, les systèmes suivants ont-ils une solution unique, une infinité de solution ou pas de solution ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 6x_2 & = & 4 \\ -4x_1 & - & 12x_2 & = & -8 \end{array}\right.$$

Le système précédent admet une infinité de solution.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & 7 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Le système précédent admet une unique solution solution.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & - & 3x_2 & = & 14 \\ 16x_1 & - & 12x_2 & = & 2 \end{array}\right.$$

Le système précédent n'admet pas de solution.

Un peu de théorie (1)

Définition : Le **rang** d'une matrice $\mathbf{A}$, noté $\mathrm{rg}(\mathbf{A})$ est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

Remarque : Si $\mathbf{A}$ est de taille $m \times n$, alors $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

Exercice : Quel est le rang de cette matrice ?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 4 & 10 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Correction

Un peu de théorie (1)

Exercice : Quel est le rang de cette matrice ?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 4 & 10 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Correction : Notons l_i, $i = 1, \ldots, 4$ les lignes de la matrice $\mathbf{A}$.

Au moins une des lignes est non nulle, donc $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) \geq 1$.

l_1 et l_2 sont linéairement indépendants. En effet, il n'existe pas de réel λ tel que $l_2 = \lambda l_1$, donc $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) \geq 2$.

l_1, l_2 et l_4 sont linéairement indépendants. En effet, il n'existe pas de réels λ et μ tel que $l_4 = \lambda l_1 + \mu l_2$, donc $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) \geq 3$.

$l_3 = 2l_1 + l_2 - l_4$, l_3 n'est pas linéairement indépendante de l_1, l_2 et l_4 d'où

$$\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 3$$

Un peu de théorie (2)

Théorème de Rouché–Fontené :

Soit le système suivant $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec

- $\mathbf{x}$ vecteur contenant les n variables **réelles** rechérchées.
- $\mathbf{A}$ matrice de taille $m \times n$ contenant des coefficients **réels**.
- $\mathbf{b}$ vecteur contenant m **réels**.

Ce système admet une solution **si et seulement si**

$$\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{rg}([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$$

De plus, si $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = n$, alors le système admet une unique solution. Sinon, le système admet une infinité de solutions.

Un peu de théorie (3)

Décomposition en valeurs singulières :

Soit $\mathbf{M}$ une matrice de taille $m \times n$ dont les coefficients sont des **réels**. Alors, il existe une factorisation de la forme :

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T$$

avec :

- $\mathbf{U}$ matrice **orthogonale** de taille $m \times m$ ($\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}_m$)
- $\mathbf{V}$ matrice **orthogonale** de taille $n \times n$ ($\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_n$)
- $\boldsymbol{\Sigma}$ matrice de taille $m \times n$ dont les termes diagnonaux (appelés **valeurs singulières**) sont positifs ou nuls et tous les autres sont nuls.

Remarque : La décomposition en valeur singulière de la matrice $\mathbf{M}$ n'est pas forcément unique.

Un peu de théorie (4)

La matrice $\mathbf{\Sigma}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

En général, on range les $\sigma_i \geq 0$ $(i = 1, \dots, \min(m, n))$ par ordre décroissant.

Proposition :

$$\text{rg}(\mathbf{M}) = \text{nombre de valeurs singulières } > 0$$

Plan

Avec la décomposition en valeurs singulières

Dans toute la suite, on admet que le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet une unique solution. Cela implique que :

- $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = n$ avec $\mathbf{A}$ matrice de taille $m \times n$
- $m \geq n$

La décomposition en valeurs singulière de $\mathbf{A}$ n'est pas toujours unique, les matrices $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ peuvent ne pas être uniques mais la matrice $\mathbf{\Sigma}$ avec les valeurs singulières triées dans l'ordre décroissant sur la diagonale est elle unique. Cependant, elle permet de résoudre le système linéaire.

$$\text{Si on a la décomposition} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^T$$

$$\text{on a} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{V\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{b}$$

"Inverse" de la matrice $\mathbf{\Sigma}$

Dans le cas où le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet une unique solution. Les valeurs singulières σ_i sont strictement positives $(i = 1, \ldots, n)$ et

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \sigma_n \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{\sigma_n} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice

Soit le système à résoudre suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 12 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 13 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & = & -2 \end{array}\right.$$

On a l'égalité suivante

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Vérifier que l'égalité précédente est une décomposition en valeurs singulières et l'utiliser pour montrer que $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est l'unique solution du système décrit plus haut.

Exercice (correction)

Exercice (correction)

Exercice (correction)

On considère comme acquis la validité de l'égalité précédente et on a

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{2}{3}\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{2}{3}\frac{2}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{3}\frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{2}{3}\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{2}{3}\frac{2}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{3}\frac{2}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{3}\frac{2}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{3}\frac{2}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice (correction)

On a aussi

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et comme $\mathbf{\Sigma}$ est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont positifs, on a bien la décomposition en valeurs singulières de la matrice $\mathbf{A}$ du système linéaire $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

D'autre part, $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$ et on cherche 2 variables, le système admet donc une unique solution que l'on va calculer grâce à la formule

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{b}$$

Exercice (correction)

$$\mathbf{U}^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{25\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{25\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Résolution système linéaire avec matrice carrée

L'algorithme de décomposition en valeurs singulières est trop couteux à utiliser pour résoudre des systèmes linéaires contenant de nombreuses équations. Il existe en général d'autres manières plus efficaces pour résoudre ces systèmes.

Méthodes "directes" :

- pivot de Gauss (ou élimination de Gauss-Jordan)
- décomposition LU (si **A** est une matrice carrée)
- décomposition QR, ...

Méthodes "itératives" (si **A** est une matrice carrée) :

- méthode de Jacobi
- méthode de Gauss-Seidel
- méthode SOR, ...

D'autres méthodes existent si **A** possède d'autres propriétés (par ex. : si **A** symétrique, factorisation de Cholesky)

Décomposition LU

On suppose que le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet une unique solution et que $\mathbf{A}$ soit une matrice carrée.

L'idée de la décomposition LU est de décomposer $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ avec

- $\mathbf{L}$ matrice triangulaire inférieure
- $\mathbf{U}$ matrice triangulaire supérieure

pour pouvoir faciliter la résolution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en 2 étapes simples

- Résoudre l'équation $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ pour $\mathbf{y}$
- Puis résoudre l'équation $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ pour $\mathbf{x}$

On ne détaille pas ici comment obtenir les matrices $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$.

Remarque : La décomposition LU n'existe pas toujours sur $\mathbf{A}$ même si elle est inversible.

Exemple

On veut résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array}\right.$$

On a la décomposition LU suivante

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve facilement la solution à $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, c'est $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{20}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$

Exemple (suite)

On trouve facilement la solution à $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, c'est $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Décomposition QR

On suppose que le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet une unique solution et que $\mathbf{A}$ soit une matrice carrée.

L'idée de la décomposition QR est de décomposer $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ avec

- $\mathbf{Q}$ matrice orthogonale ($\mathbf{QQ}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$)
- $\mathbf{R}$ matrice triangulaire supérieure

pour pouvoir faciliter la résolution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en 2 étapes simples

- Multiplier $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$
- Puis résoudre l'équation $\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$ pour $\mathbf{x}$

On ne détaille pas ici comment obtenir les matrices $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$.

Remarque : La décomposition QR existe pour toute matrice $\mathbf{A}$ carrée.

Méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel

On suppose que le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet une unique solution et que $\mathbf{A}$ soit une matrice carrée.

L'idée principale est de construire la suite de vecteurs suivante

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 & \text{connu} \\ \mathbf{x}_{k+1} & = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_k + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \end{cases}$$

dont la limite soit solution du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ et la matrice $\mathbf{M}$ facilement inversible. Pour trouver $\mathbf{M}$ correct, on décompose la matrice $\mathbf{A}$ de la manière suivante

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}$$

avec

- $\mathbf{D}$ matrice diagonale de $\mathbf{A}$
- $-\mathbf{E}$ matrice triangulaire inférieure de $\mathbf{A}$ de diagonale nulle
- $-\mathbf{F}$ matrice triangulaire supérieure de $\mathbf{A}$ de diagonale nulle

Méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel

Jacobi : $\mathbf{M} = \mathbf{D}$ et $\mathbf{N} = \mathbf{E} + \mathbf{F}$.

Gauss-Seidel : $\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{E}$ et $\mathbf{N} = \mathbf{F}$.

Théorème : Les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel quel que soit $\mathbf{x}_0$ pour les systèmes linéaires dont les matrices est à diagonale strictement dominante. Si on note a_{ij} le coefficient de $\mathbf{A}$ à la ligne i et à la colonne j (variants de 1 à n), cela se traduit par

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, \ldots, n$$

Remarque : Gauss-Seidel converge plus vite que Jacobi.