Grenoble INP – Pagora **Analyse numérique**
1ère année

Correction TD 1 : Approximation de fonctions

NB : Ne sont corrigés ici que les exercices n'ayant pas été corrigés en TD (pour ces exercices, cf. vos notes).

1 Méthode des moindres carrés

Exercice 1 (quartet d'Anscombe) *Le statisticien Francis Anscombe a défini en 1973 plusieurs ensembles de données ayant une propriété intéressante. Les voici*

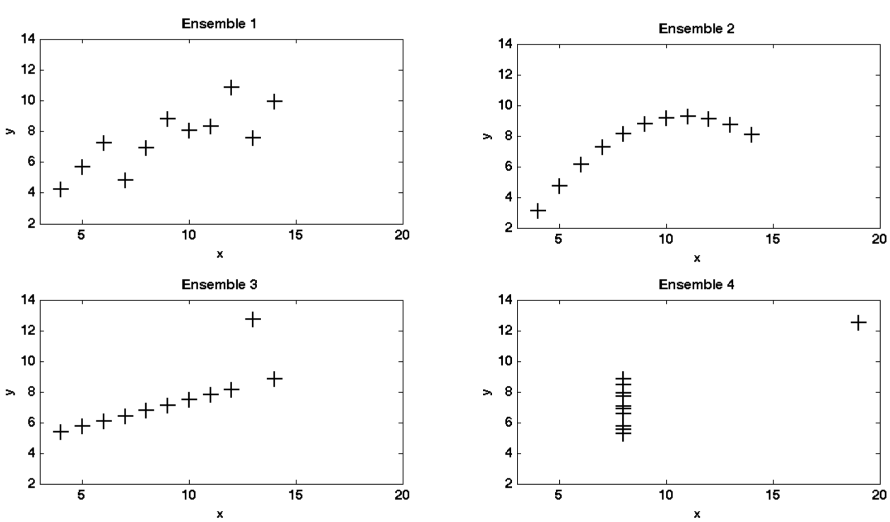
x	y	x	y	x	y	x	y
10.0	8.04	10.0	9.14	10.0	7.46	8.0	6.58
8.0	6.95	8.0	8.14	8.0	6.77	8.0	5.76
13.0	7.58	13.0	8.74	13.0	12.74	8.0	7.71
9.0	8.81	9.0	8.77	9.0	7.11	8.0	8.84
11.0	8.33	11.0	9.26	11.0	7.81	8.0	8.47
14.0	9.96	14.0	8.10	14.0	8.84	8.0	7.04
6.0	7.24	6.0	6.13	6.0	6.08	8.0	5.25
4.0	4.26	4.0	3.10	4.0	5.39	19.0	12.50
12.0	10.84	12.0	9.13	12.0	8.15	8.0	5.56
7.0	4.82	7.0	7.26	7.0	6.42	8.0	7.91
5.0	5.68	5.0	4.74	5.0	5.73	8.0	6.89

1. *A l'aide d'une calculatrice, calculer les coefficients de régression linéaire des 4 ensembles.*
2. *Que vaut le minimum de*

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

pour chaque ensemble ?

3. *Que remarquez vous ?*



4. *Voici une représentation graphique des 4 jeux de données (cf. page précédente). Dans quels cas l'utilisation de la régression linéaire semble t-elle pertinente ? Dans quels cas ne l'est-elle pas ? Justifier.*

Exercice 2 (régression linéaire pondérée) *Soit le modèle de régression linéaire*

$$f(x, a, b) = ax + b$$

Lorsque on veut estimer les paramètres adéquats pour ce modèle en fonction des données (n points (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n$) et de leurs incertitudes, on cherche les paramètres a et b minimisant

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(y_i - ax_i - b \right)^2$$

avec σ_i l'écart-type de l'erreur commise sur la mesure de y_i. On a $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{w_i}}$. Notons les moyennes pondérées $\overline{x}^p$ et $\overline{y}^p$ définies de la manière suivante :

$$\overline{x}^p = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \qquad \overline{y}^p = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

1. *Montrer qu'au minimum de χ^2, b vaut*
$$b = \overline{y}^p - a\overline{x}^p$$
2. *Montrer qu'au minimum de χ^2, a vaut*
$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \left(x_i - \overline{x}^p \right) \left(y_i - \overline{y}^p \right)}{\sum_{i=1}^{n} w_i \left(x_i - \overline{x}^p \right)^2}$$
3. *Supposons que les écart-types des erreurs commises sur y_i soient égaux. Que valent a et b ?*

1. On cherche le minimum de la fonction χ^2. Pour cela, il faut chercher où le gradient de χ^2 vaut 0. On doit donc calculer les dérivées partielles de χ^2 par rapport à a et b. Celles-ci valent

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \chi^2}{\partial a} & = & -2 \sum_{i=1}^{n} w_i x_i (y_i - ax_i - b) \\ \dfrac{\partial \chi^2}{\partial b} & = & -2 \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - ax_i - b) \end{array} \right.$$

Le minimum de χ^2 est donc atteint pour (a, b) solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i (y_i - ax_i - b) & = & 0 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - ax_i - b) & = & 0 \end{array} \right.$$

La seconde ligne du système à résoudre donne

$$\sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - ax_i - b) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i y_i - a \sum_{i=1}^{n} w_i x_i - b \sum_{i=1}^{n} = 0$$

D'où

$$b = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \left(\sum_{i=1}^{n} w_i y_i - a \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \right) = \overline{y}^p - a\overline{x}^p$$

2. Si on réécrit le système à résoudre, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i (y_i - a x_i - b) & = & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i (y_i - \overline{y}^p - a(x_i - \overline{x}^p)) & = & 0 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - a x_i - b) & = & \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - \overline{y}^p - a(x_i - \overline{x}^p)) & = & 0 \end{array} \right.$$

Si on multiplie la deuxième ligne par $\overline{x}^p$ et qu'on la soustrait à la première ligne, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i (y_i - \overline{y}^p - a(x_i - \overline{x}^p)) - \overline{x}^p \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - \overline{y}^p - a(x_i - \overline{x}^p) = 0 - \overline{x}^p \times 0 = 0$$

Or

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i (y_i - \overline{y}^p - a(x_i - \overline{x}^p)) - \overline{x}^p \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - \overline{y}^p - a(x_i - \overline{x}^p) &= \sum_{i=1}^{n} w_i (x_i - \overline{x}^p)(y_i - \overline{y}^p - a(x_i - \overline{x}^p)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i (x_i - \overline{x}^p)(y_i - \overline{y}^p) - a \sum_{i=1}^{n} w_i (x_i - \overline{x}^p)^2 \end{aligned}$$

Et finalement, on obtient

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i (x_i - \overline{x}^p)(y_i - \overline{y}^p)}{\sum_{i=1}^{n} w_i (x_i - \overline{x}^p)^2}$$

3. Supposons maintenant que les écart-types des erreurs commises sur y_i soient égaux. Cela veut dire que les w_i ont tous la même valeur, notons cette valeur w. Les moyennes pondérées valent

$$\overline{x}^p = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{w \sum_{i=1}^{n} x_i}{w \sum_{i=1}^{n} 1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x} \qquad \overline{y}^p = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{w \sum_{i=1}^{n} y_i}{w \sum_{i=1}^{n} 1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \overline{y}$$

On remarque que $\overline{x}^p$ et $\overline{y}^p$ sont égales aux moyennes usuelles $\overline{x}$ et $\overline{y}$. Pour a et b, on a

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i (x_i - \overline{x}^p)(y_i - \overline{y}^p)}{\sum_{i=1}^{n} w_i (x_i - \overline{x}^p)^2} = \frac{w \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}^p)(y_i - \overline{y}^p)}{w \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}^p)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

$$b = \overline{y}^p - a\overline{x}^p = \overline{y} - a\overline{x}$$

On retrouve a et b, les deux coefficients de la régression linéaire.

2 Interpolation

Exercice 3 *La mesure de la tension aux bornes d'un dipôle a donné les valeurs suivantes*

t $[s]$	0	3	4
U $[V]$	-8.0	4	0

On suppose que cette tension varie suffisamment lentement pour qu'on puisse l'approximer par un polynôme de degré faible. Estimez à partir de ces données l'instant $\hat{t}$ où la tension devrait atteindre son maximum, ainsi que la tension $\hat{U}$ en ce maximum.

On suppose que la tension varie suffisamment lentement pour qu'on puisse l'approximer par un polynôme de degré faible. On va donc interpoler la tension aux points $(0, -8)$, $(3, 4)$ et $(4, 0)$. Pour cela, on va contruire la forme lagrangienne du polynôme d'interpolation noté L. On rappelle que ce polynôme est une combinaison linéaire

$$L(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \, \ell_j(x)$$

de polynômes de Lagrange

$$\ell_j(x) = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_j - x_n}$$

Dans notre cas n vaut 2, l'indice j varie donc de 0 à 2 et

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - 3}{0 - 3} \frac{x - 4}{0 - 4} = \frac{1}{12}(x - 3)(x - 4) \\
\ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 0}{3 - 0} \frac{x - 4}{3 - 4} = -\frac{1}{3}x(x - 4) \\
\ell_2(x) &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 0}{4 - 0} \frac{x - 3}{4 - 3} = \frac{1}{4}x(x - 3)
\end{aligned}$$

et le polynôme d'interpolation vaut

$$\begin{aligned}
L(x) = \sum_{j=0}^{2} y_j \, \ell_j(x) = -8\ell_0(x) + 4\ell_1(x) + 0\ell_2(x) &= -\frac{8}{12}(x - 3)(x - 4) - \frac{4}{3}x(x - 4) \\
&= (x - 4)\left(-\frac{2}{3}(x - 3) - \frac{4}{3}x\right) = (x - 4)(-2x + 2) = -2x^2 + 10x - 8
\end{aligned}$$

et sa dérivée

$$L'(x) = -4x + 10$$

d'où le tableau des variations suivant

x	0		2.5		3		4
$L'(x)$		$+$	0		$-$		
$L(x)$	-8	$\nearrow$	$\hat{U} = 4.5$	$\searrow$	4	$\searrow$	0

La tension maximale est donc atteinte en $\hat{t} = 2.5$ et elle vaut $\hat{U} = 4.5$

Exercice 4 *Soit le programme Scilab suivant*

```
function y = interpo(x,xi,yi)

n = size(xi,2) // nombre de points d'interpolation
// xi vecteur contenant les xi
// yi vecteur contenant les yi, (xi,yi) points d'interpolation

y = 0 ; // y va contenir le resultat de l'interpolation
for j = 1:n
   l = 1 ;
   for k = 1:n
      if (k == j) // cas ou k = j
         // Rien a faire
      else // sinon
         l = l.*(x - xi(k))./(xi(j) - xi(k)) ;
      end
   end
   y = ......................... ;
end

endfunction
```

Compléter le fichier pour que **y** *soit le résultat de l'interpolation polynômiale des points* (x_i, y_i) *calculé en* **x**. *Justifier votre choix.*

Exercice 5 *Le polynôme P interpole la fonction f suivante aux points d'abscisses* 1, 2, 4.

$$f(x) = \frac{4}{x} \qquad P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 7$$

1. *Vérifier que P interpole bien f aux points d'abscisses* 1, 2, 4.
2. *Calculer l'erreur*
$$\epsilon(x) = f(x) - P(x)$$
3. *Quand cette erreur prend elle sa valeur maximale pour x dans* $[1, 4]$ *?*
4. *Que faire pour réduire cette erreur ?*

1. On a que

$$f(1) = 4 \qquad P(1) = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} + 7 = 7 - 3 = 4$$

$$f(2) = \frac{4}{2} = 2 \qquad P(2) = \frac{1}{2} \times 2^2 - \frac{7}{2} \times 2 + 7 = 2 - 7 + 7 = 2$$

$$f(4) = \frac{4}{4} = 1 \qquad P(4) = \frac{1}{2} \times 4^2 - \frac{7}{2} \times 4 + 7 = 8 - 14 + 7 = 1$$

Le polynôme P interpole bien f aux points d'abscisses 1, 2 et 4.

2. L'erreur vaut

$$\epsilon(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 7 = \frac{1}{2x}\left(8 - x^3 + 7x^2 - 14x\right) = \frac{1}{2x}(1-x)(2-x)(4-x)$$

3. Pour savoir où l'erreur prend sa valeur maximale sur $[1,4]$, on calcule sa dérivée. On a

$$\epsilon'(x) = -\frac{4}{x^2} - x + \frac{7}{2}$$

Il nous faut déterminer le signe de ϵ' pour connaitre les variations de ϵ. Cependant, ceci n'est pas accessible directement. On va donc calculer la dérivée seconde ϵ''

$$\epsilon''(x) = \frac{8}{x^3} - 1$$

et on a le tableau des variation suivant pour ϵ'

x	1		x_1		2		x_2		4
$\epsilon''(x)$			$+$		0		$-$		
$\epsilon'(x)$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$

et d'après le **théorème des valeurs intermédiaires** (cf. cours résolution d''équations non-linéaires), il existe $x_1 \in]1,2[$ et $x_2 \in]2,4[$ tel que

$$\epsilon'(x_1) = \epsilon'(x_2) = 0$$

Numériquement, on trouve que $x_1 \approx 1.37$ et $x_2 \approx 3.07$. On a maintenant le tableau des variations pour ϵ

x	1		x_1		2		x_2		4
$\epsilon'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$\epsilon(x)$	0	$\searrow$	$f(x_1) \approx -0.2237$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(x_2) \approx 0.3354$	$\searrow$	0

L'erreur prend sa valeur maximale en x_2, elle vaut environ 0.3354.

4. Une idée pour diminuer l'erreur serait d'ajouter un point d'interpolation (par exemple, $(x_2, f(x_2))$). Cependant, il est possible qu'ajouter ce point d'interpolation fasse empirer les choses (phénomène de Runge par exemple).

3 Extrait de l'examen de 2012

3.1 Interpolation polynômiale (4 points)

On veut calculer les valeurs d'une fonction $f(x)$ pour toutes les valeurs de x, mais on ne connaît pas f explicitement. Ceci se produit typiquement lorsque f n'est connue qu'en certains points expérimentaux. On considère la fonction f dont 3 points du graphique sont connus ($f(0) = 1$, $f(1) = 3$ et $f(2) = 7$). On propose de chercher f dans la famille des polynômes.

Question 1 *Quel est le degré n du polynôme d'interpolation P tel que le problème admette une solution unique ?*

On cherche à interpoler une fonction f en trois points en utilisant l'interpolation polynômiale. Notons P le polynôme interpolant f en ces trois points. On note que les points d'interpolation ont des abscisses différentes. Ainsi, pour que le polynôme d'interpolation P soit unique, il faut que son degré soit de $n = 2$ (nombre de points d'interpolation - 1).

Question 2 *Ecrire le système d'équations qui détermine les coefficients (a,b,c) de ce polynôme ($P(x) = a + bx + cx^2$) et le résoudre.*

On veut que $P(0) = 1$, $P(1) = 3$ et $P(2) = 7$ (car P interpole f en ces points). On a donc à résoudre le système suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & & & & & = & 1 \\ a & + & b & + & c & = & 3 \\ a & + & 2b & + & 4c & = & 7 \end{array}\right.$$

On a immédiatement que $a = 1$ et on réinjecte la valeur de a dans les deuxième et troisième lignes. On a ainsi le système suivant pour trouver b et c

$$\left\{\begin{array}{ccccc} b & + & c & = & 2 \\ 2b & + & 4c & = & 6 \end{array}\right.$$

Si on multiplie la première ligne par 2 et qu'on la soustraie à la seconde ligne, on a

$$2b + 4c - 2 \times (b + c) = 2c = 6 - 2 \times 2 = 4$$

d'où $c = 1$ et comme $b + c = 2$, on en déduit que $b = 1$. Le polynôme

$$P(x) = 1 + x + x^2$$

interpole donc f aux points $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ et $f(2) = 7$.

Question 3 *Ecrire directement la solution grâce à la forme de Lagrange.*

On recherche maintenant P en utilisant la forme de Lagrange. On rappelle ici que

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \, \ell_j(x)$$

avec les polynômes de Lagrange

$$\ell_j(x) = \prod_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k} = \frac{x-x_0}{x_j-x_0} \cdots \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} \frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}} \cdots \frac{x-x_n}{x_j-x_n}$$

Dans notre cas n vaut 2, l'indice j varie donc de 0 à 2 et

$$\ell_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{x-1}{0-1} \frac{x-2}{0-2} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

$$\ell_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x-0}{1-0} \frac{x-2}{1-2} = -x(x-2)$$

$$\ell_2(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-0}{2-0} \frac{x-1}{2-1} = \frac{1}{2}x(x-2)$$

et le polynôme d'interpolation vaut

$$\begin{aligned} P(x) = \sum_{j=0}^{2} y_j \, \ell_j(x) = \ell_0(x) + 3\ell_1(x) + 7\ell_2(x) &= \frac{1}{2}(x-1)(x-2) - 3x(x-2) + \frac{7}{2}x(x-1) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 - 3x^2 + 6x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{7}{2} = x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

On retrouve bien le même polynôme d'interpolation qu'à la question précédente.

3.2 Approximation au sens des moindres carrés (4 points)

On considère toujours la fonction f connue expérimentalement en trois points. Cependant, on considère que les mesures sont entachées d'erreurs ($f(0) \approx 1$, $f(1) \approx 3$ et $f(2) \approx 7$) et on cherche une fonction f de la forme $f(x) = a\sqrt{|x-1|} + bx^2$.

Question 4 *A priori, peut-on trouver une fonction de la forme $f(x) = a\sqrt{|x-1|} + bx^2$ qui passe exactement par les trois points expérimentaux ?*

On cherche 2 inconnues a et b. Pour que la forme f passe par les trois points expérimentaux, il faut que a et b suivent trois équations. Or il n'y a en général pas de solution pour un système de 3 équations à 2 inconnues. Il est donc vraisemble qu'il n'existe pas une fonction de la forme $f(x) = a\sqrt{|x-1|} + bx^2$ passant exactement par les trois points expérimentaux.

Question 5 *Ecrire le problème de minimisation qui détermine les coefficients a et b au sens des moindres carrés.*

La fonction modèle est de la forme

$$f(x, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \phi_k(x)$$

Ici, $\beta_1 = a$, $\phi_1(x) = \sqrt{|x-1|}$ et $\beta_2 = b$, $\phi_2(x) = x^2$. On a donc affaire à un problème des moindres carrés linéaires. On cherche ainsi a et b tel que la quantité suivante $S(a,b)$ soit minimale

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{3}(y_i - a\sqrt{|x_i-1|} - bx_i^2)^2 = (1-a)^2 + (3-b)^2 + (7-a-4b)^2$$

Question 6 *Déterminer le système d'équations linéaires à résoudre. Résoudre le système.*

Le minimum de S est atteint lorsque les dérivées partielles de S en a et b s'annulent or

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} & = & -2(1-a) - 2(7-a-4b) & = & 4a + 8b - 16 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} & = & -2(3-b) - 2 \times 4(7-a-4b) & = & 8a + 34b - 62 \end{cases}$$

On doit donc résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 4a & + & 8b & = & 16 \\ 8a & + & 34b & = & 62 \end{cases}$$

qui équivaut à ce nouveau système

$$\begin{cases} a & + & 2b & = & 4 \\ 4a & + & 17b & = & 31 \end{cases}$$

Maintenant si on multiplie la première ligne par 4 et qu'on la soustraie à la seconde ligne, on a

$$4a + 17b - 4 \times (a + 2b) = 9b = 31 - 4 \times 4 = 15$$

et on obtient que

$$b = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

Si on remplace la valeur de b nouvellement obtenue dans la première équation, on a

$$a = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$$

La solution du système est donc $\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right)$ et la fonction f vaut

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{|x-1|} + \frac{5}{3}x^2$$

On vérifie d'ailleurs qu'elle ne passe pas exactement par les points donnés.