Analyse numérique : Approximation de fonctions

Pagora 1A

Chapitre 3

29 janvier - 1er février 2013

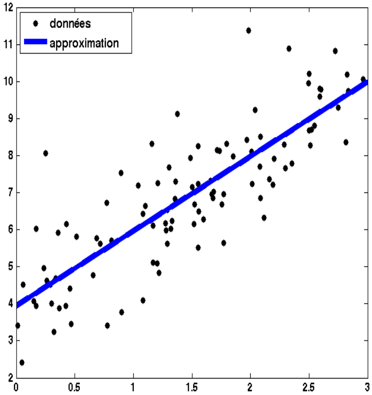
Plan

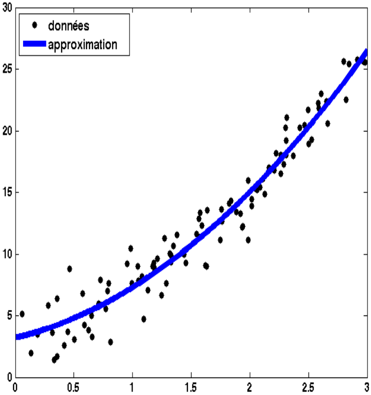
Plan

Description du problème

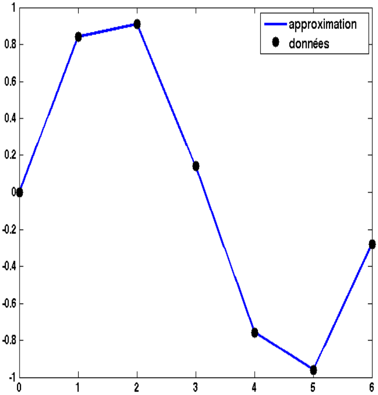
- On cherche à calculer les valeurs d'une fonction $f(x)$ pour toutes valeurs de x mais on ne connaît pas explicitement f. Par exemple,
  - f n'est connue qu'en certains points x expérimentaux.
  - f est calculée par un code numérique très coûteux.
- On remplace f par une fonction simple dont l'évaluation est aisée (ex : utilisation de polynômes, fonctions rationnelles, ...)
- 2 grandes familles d'approches.

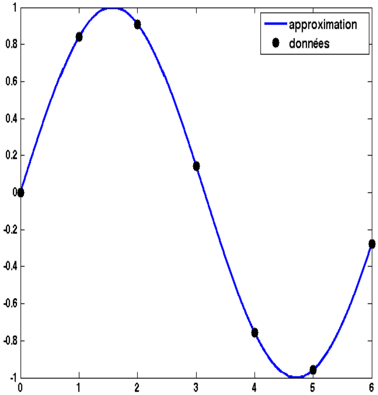
Méthode des moindres carrés





Interpolation polynômiale





Plan

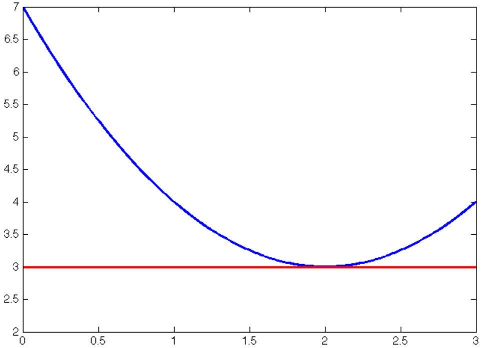
Description du problème

- De quoi dispose t-on ?
  - Ensemble de données : n points (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$
  - Fonction modèle : $f(x, \beta)$ avec β vecteur contenant m paramètres
- Objectif : ajuster les paramètres β pour que $f(x, \beta)$ approche au mieux les données (x_i, y_i).
- Comment faire ? En trouvant les paramètres β minimisant

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, \beta))^2$$

Rappel

La dérivée permet de connaître les variations d'une fonction (croissance, décroissance, ...). En particulier, si la dérivée est nulle en un point, la tangente est horizontale en ce point et donc la fonction ne croit ni ne décroit (minimum ou maximum).



Exercice introductif

On dispose de n points (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n$ et on suppose que la fonction modèle est de la forme

$$f(x, \beta_0) = \beta_0$$

Trouver β_0 minimisant

$$S(\beta_0) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, \beta_0))^2$$

Exercice introductif (correction)

Trouver β_0 minimisant

$$S(\beta_0) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0)^2$$

Pour cela, on calcule la dérivée de S

$$S'(\beta_0) = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0)$$

et on résout $S'(\beta_0) = 0$ d'où

$$\beta_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

c'est à dire la moyenne des y_i.

Plan

Résoudre le problème général

La fonction modèle $f(x, \boldsymbol{\beta})$ se règle par m paramètres $\beta_1, \ldots, \beta_m$ contenus dans le vecteur $\boldsymbol{\beta}$.

Le minimum d'une somme de carrés

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, \boldsymbol{\beta}))^2$$

se trouve en cherchant où le gradient de S vaut 0 soit

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, \boldsymbol{\beta})) \frac{\partial f(x_i, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} = 0 \qquad k = 1, \ldots, m$$

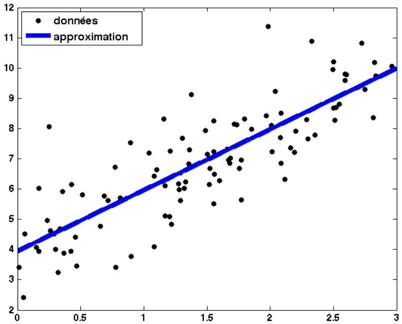
$\Longrightarrow$ un système à m équations non-linéaires à résoudre.
$\Longrightarrow$ rarement de solutions analytiques.
$\Longrightarrow$ méthodes numériques (ex : adaptation méthode du point fixe pour m variables cherchées).

Plan

Régression linéaire

La fonction modèle est de la forme

$$f(x, a, b) = ax + b$$



On cherche le minimum de

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

Recherche du minimum

Le minimum de S est atteint pour (a, b) solution du système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} & = & -2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\,(y_i - ax_i - b) & = & 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} & = & -2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) & = & 0 \end{cases}$$

On note $\overline{x}$ et $\overline{y}$ les moyennes des valeurs x_i et y_i :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Exercice

Exprimer b en fonction de a, $\overline{x}$, $\overline{y}$ puis exprimer a.

Exercice (correction)

$$\boxed{b = \overline{y} - a\,\overline{x}}$$

Le système est maintenant

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^n x_i\left[(y_i - \overline{y}) - a(x_i - \overline{x})\right] & = & 0 \\ \\ \sum_{i=1}^n \left[(y_i - \overline{y}) - a(x_i - \overline{x})\right] & = & 0 \end{array}\right.$$

Si on multiplie la ligne 2 par $\overline{x}$ puis on la soustraie à la première, on obtient

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})\left[(y_i - \overline{y}) - a(x_i - \overline{x})\right] = 0$$

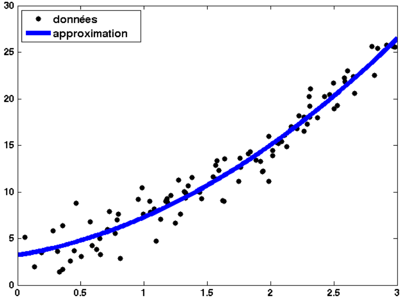
$$\boxed{a = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}}{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 - \overline{x}^2}}$$

Plan

Moindres carrés linéaires : généralisation régression linéaire

On suppose maintenant que la fonction modèle est de la forme :

$$f(x, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \, \phi_k(x)$$



On cherche $\boldsymbol{\beta}$ pour obtenir le minimum de S atteint lorsque

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, \boldsymbol{\beta})) \, \frac{\partial f(x_i, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} = 0 \qquad k = 1, \ldots, m$$

Création d'un système linéaire à résoudre

On a pour $i = 1, \ldots, n$ et $k = 1, \ldots, m$:

$$X_{ik} = \frac{\partial f(x_i, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} = \phi_k(x_i)$$

Posons la matrice et les vecteurs

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \ldots & X_{nm} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

On a $\boldsymbol{\beta}$ minimum de S si solution du système

$$\boxed{\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right) \boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}}$$

Exercice

Établir le système $\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)\,\beta = \mathbf{X}^T\,\mathbf{y}$.

Exercice (correction)

Établir le système $\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}^T\,\mathbf{y}$.

Le minimum de S est atteint pour

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ik}\left(y_i - \sum_{j=1}^{m}\beta_j X_{ij}\right) = 0 \qquad k = 1, \ldots, m$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ik} y_i = \sum_{i=1}^{n} X_{ik}\sum_{j=1}^{m}\beta_j X_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{n} X_{ik} X_{ij}\right) \qquad k = 1, \ldots, m$$

Et sous forme matricielle,

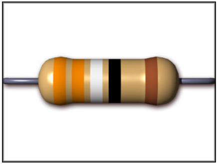
$$\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}^T\,\mathbf{y}$$

Plan

Mesures expérimentales

En général, les mesures faites sur y_i sont entâchées d'erreur. Notons σ_i une estimation de l'écart-type du bruit qui affecte chaque mesure.

Exemple : On cherche à déterminer la valeur de la résistance R du composant électronique resistance.



Pour cela, on prescrit différentes intensités i (nos x_i) à la résistance et on mesure la tension U par un voltmètre. La loi d'Ohm nous dit que $U = Ri$. Les mesures de tension (nos y_i) sont entâchées d'erreur du fait de la précision du voltmètre (on a par exemple $\sigma_i = 0.05V$).

Prise en compte des incertitudes

Au lieu de chercher à minimiser la quantité

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, \beta))^2$$

on va chercher à minimiser

$$\chi^2(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - f(x_i, \beta)}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i \, (y_i - f(x_i, \beta))^2$$

Exercice

On dispose de n points (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$ et on suppose que la fonction modèle est de la forme

$$f(x, \beta_0) = \beta_0$$

Chaque mesure y_i est entâchée d'une erreur dont l'écart-type est estimé à $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{w_i}}$.

Trouver β_0 minimisant

$$\chi^2(\beta_0) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(y_i - f(x_i, \beta_0)\right)^2$$

Exercice (correction)

Trouver β_0 minimisant

$$\chi^2(\beta_0) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(y_i - f(x_i, \beta_0)\right)^2$$

La dérivée vaut

$$\chi^{2'}(\beta_0) = -2 \sum_{i=1}^{n} w_i \left(y_i - \beta_0\right)$$

et on résout $\chi^{2'}(\beta_0) = 0$, d'où

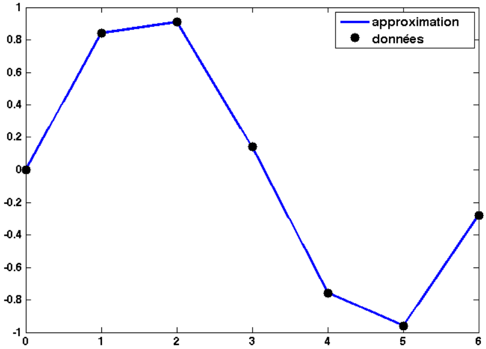
$$\beta_0 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i y_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

moyenne pondérée des y_i.

Plan

Introduction : interpolation linéaire par morceaux

Exercice : on dispose de $n+1$ *points* (x_i, y_i)*,* $i = 0, \ldots, n$*. On suppose* $x_0 < x_1 < x_n$*. On construit* f *fonction d'interpolation entre* x_0 *et* x_n *tel que les points* (x_i, y_i) *soient reliés entre eux par des droites. Exprimer* f



Interpolation linéaire par morceaux (correction)

Exercice : on dispose de $n+1$ points (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$. On suppose $x_0 < x_1 < x_n$. On construit f fonction d'interpolation entre x_0 et x_n tel que les points (x_i, y_i) soient reliés entre eux par des droites. Exprimer f

$$f(x) = \left\{ \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + y_i \quad \text{sur} \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \right.$$

Plan

Régularité d'une fonction

- Dans la nature, la plupart des fonctions rencontrées sont très régulières.
- On peut mesurer la régularité d'une fonction par le biais de ses dérivées. Plus une fonction est différentiable, plus la courbe qui lui est associée est lisse.
- Le problème de l'interpolation linéaire par morceaux est que la fonction d'interpolation est continue mais n'est pas dérivable.

Interpolation polynômiale

- Idée (simple) : Trouver un polynôme $P(x)$ passant par tous les points donnés (x_i, y_i) donc tel que

$$P(x_i) = y_i \qquad i = 0, \ldots, n$$

- Degré d'un polynôme : P est un polynôme de degré k si

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \qquad \text{avec} \qquad a_k \neq 0$$

- Existence et unicité de P :
  - si $k < n$, en général pas de solution (moindres carrés)
  - si $k > n$, infinité de solutions
  - si $k = n$, solution unique (sous certaines conditions) => preuve ?

Résolution d'un système linéaire

On cherche un polynôme P de la forme

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

tel que $P(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \ldots, n$.

Pour trouver les a_k, il faut résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Matrice de Vandermonde et unicité de la solution

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Le système admet une unique solution si et seulement si la matrice M est inversible. Or M est une matrice de Vandermonde, elle est inversible si

$$det(M) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \neq 0$$

Le système admet une unique solution si et seulement si les x_i, $i = 0, \dots, n$, sont deux à deux disjoints.

Plan

Comment calculer le polynôme d'interpolation

- La méthode consistant à inverser la matrice de Vandermonde ou de résoudre le système linéaire est coûteuse et instable numériquement (risque d'explosions numériques artificielles).
- Pour éviter ces problèmes, plusieurs méthodes explicites (sans résolution de systèmes linéaires) existent
  - elles évitent de calculer les coefficients a_k du polynôme P.
  - elles utilisent une autre représentation du polynôme P.

Forme lagrangienne du polynôme d'interpolation

On dispose d'un ensemble de $n+1$ points (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$ tel que si $i \neq j$, $x_i \neq x_j$.

L'interpolation polynômiale sous **forme lagrangienne** noté L est une combinaison linéaire

$$L(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \, \ell_j(x)$$

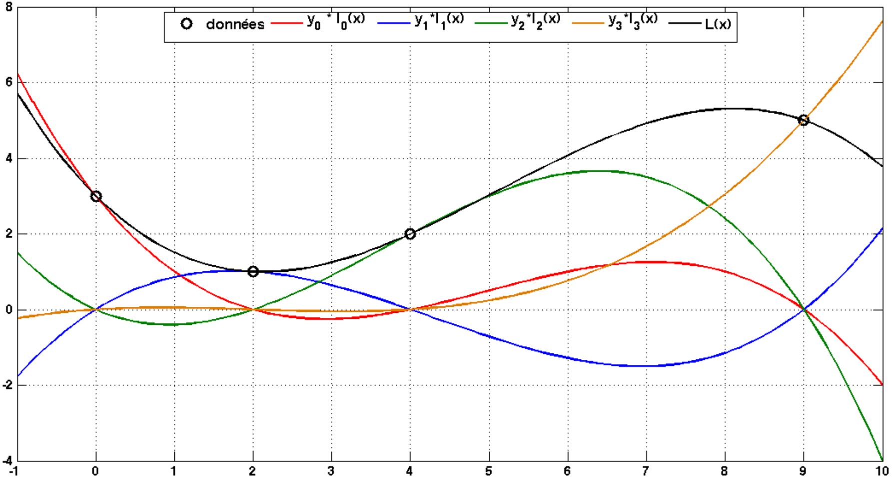
de polynômes de Lagrange

$$\ell_j(x) = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_j - x_n}$$

Les polynômes de Lagrange sont de degré n donc L est au maximum de degré n.

Exemple

On dispose des points $(0,3)$, $(2,1)$, $(4,2)$, $(9,5)$.



Exercice

Vérifier que $L(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \ldots, n$.

Exercice (correction)

Vérifier que $L(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \ldots, n$.

Pour $i \neq j$

$$\ell_j(x_i) = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} = \frac{x_i - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x_i - x_i}{x_j - x_i} \cdots \frac{x_i - x_n}{x_j - x_n} = 0$$

et

$$\ell_j(x_j) = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{x_j - x_k}{x_j - x_k} = 1$$

donc

$$L(x_i) = \sum_{j=0}^{n} y_j \, \ell_j(x_i) = y_i$$

Plan

Exercice introductif

On considère l'ensemble de points suivants

$$\left(-1, \frac{1}{26}\right) \;,\; (0, 1) \;,\; \left(1, \frac{1}{26}\right)$$

Que vaut L ?

Exercice introductif (correction)

On considère l'ensemble de points suivants

$$\left(-1, \frac{1}{26}\right) \ , \ (0, 1) \ , \ \left(1, \frac{1}{26}\right)$$

Que vaut L ?

$$\ell_0(x) = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$\ell_1(x) = -(x+1)(x-1) = -x^2 + 1$$

$$\ell_2(x) = \frac{x(x+1)}{2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

D'où

$$L(x) = y_0\,\ell_0(x) + y_1\,\ell_1(x) + y_2\,\ell_2(x) = -\frac{25}{26}x^2 + 1$$

Phénomène de Runge

Considérons la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \qquad x \in [-1, 1]$$

Runge (1856 – 1927) a montré que si cette fonction est interpolée aux points équidistants x_i entre -1 et 1

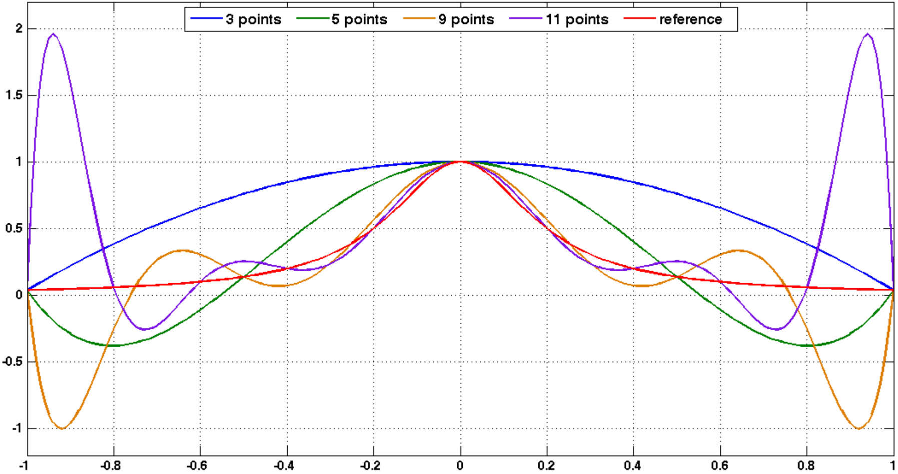
$$x_i = -1 + (i-1)\frac{2}{n} \qquad i = 0, \ldots, n$$

par un polynôme P_n de degré $\leq n$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n(x)| \right) = \infty$$

Lorsqu'on augmente le nombre de points, on constate que le polynôme se met à osciller fortement entre les points x_i avec une amplitude de plus en plus grande.

Phénomène de Runge : illustration



Plan

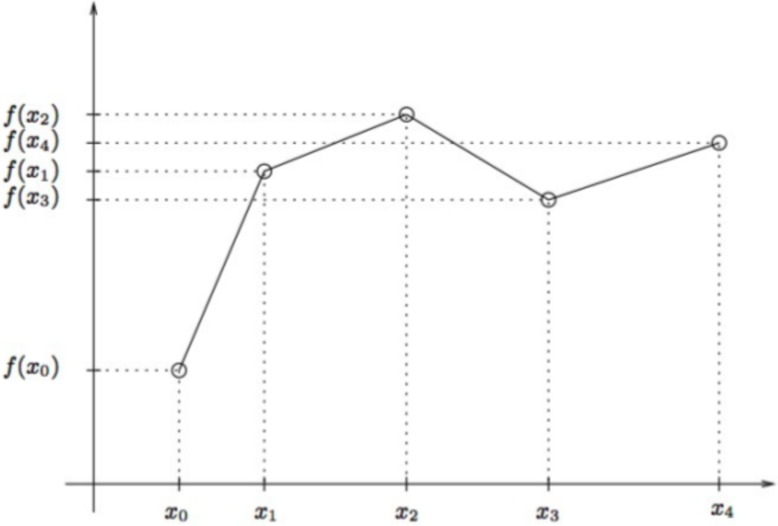
Contourner le phénomène de Runge ?

L'interpolation polynômiale (sous la forme décrite juste avant) n'est pas toujours bien adaptée à l'approximation de fonctions.

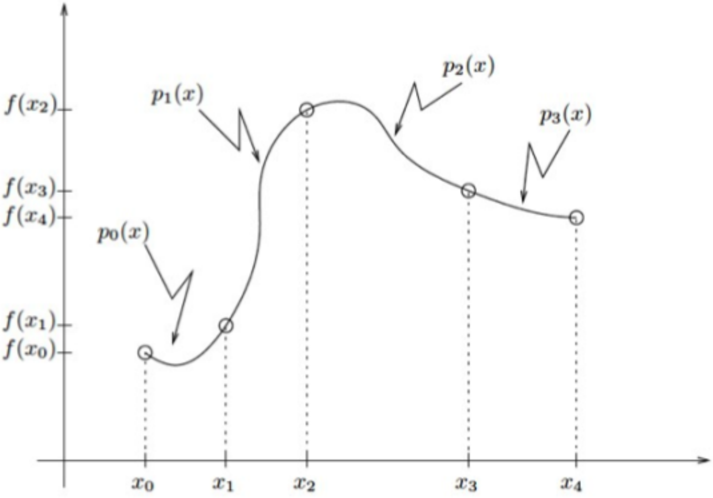
Solutions :

- Choisir les points x_i d'interpolation afin de minimiser les oscillations du polynôme d'interpolation.
- Utiliser la méthode des moindres carrés avec $k < n$.
- Segmenter : approcher la fonction par des polynômes par morceaux (splines).

Interpolation linéaire par morceaux



Spline cubique



Spline cubique

On dispose d'un ensemble de $n+1$ points (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$ tel que $x_0 < x_1 < \ldots x_n$.

La spline cubique S interpolant ces points coïncide sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ avec un polynôme p_i de degré 3 de la forme :

$$S(x) = p_i(x) = f_i + f_i'(x - x_i) + \frac{f_i''}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{f_i'''}{3!}(x - x_i)^3$$

Les coefficients à déterminer sont les f_i, f_i', f_i'' et f_i'''.

On a $n+1$ points d'interpolations donc n intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ et $4n$ inconnues à déterminer.

Conditions naturelles imposées

On veut naturellement que

$$S(x_i) = p_i(x_i) = y_i \qquad i = 0, \ldots, n-1$$

$$S(x_{i+1}) = p_i(x_{i+1}) = y_i \qquad i = 0, \ldots, n-1$$

ce qui permet d'assurer la continuité de la spline cubique S.

On a donc $4n$ inconnues et $2n$ relations utilisées pour les conditions usuelles. On se sert des $2n$ degrés de libertés restant pour imposer que la spline S soit $\mathcal{C}^2$.

Conditions $\mathcal{C}^2$

Pour que S soit $\mathcal{C}^2$ sur $[x_0, x_n]$, il faut que

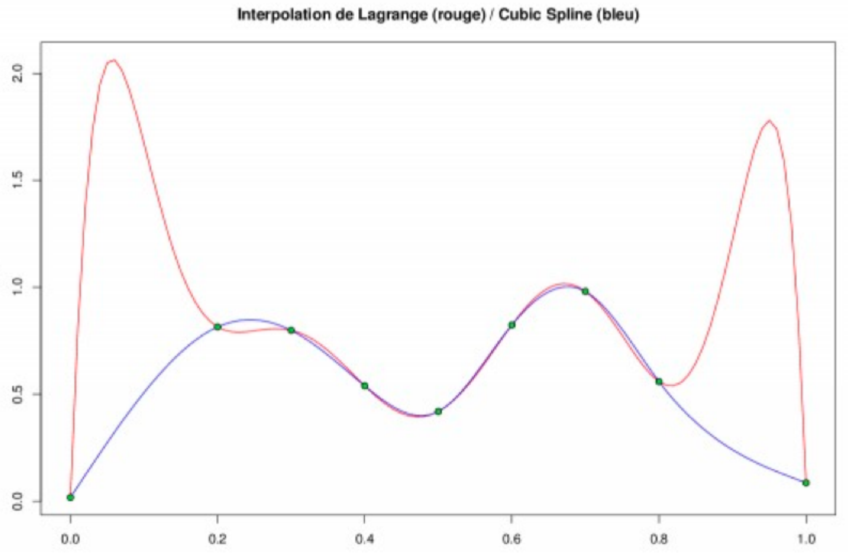
$$S'(x_{i+1}) = p_i'(x_{i+1}) = p_{i+1}'(x_{i+1}) \qquad i = 0, \dots, n-2$$

$$S''(x_{i+1}) = p_i''(x_{i+1}) = p_{i+1}''(x_{i+1}) \qquad i = 0, \dots, n-2$$

On vient d'imposer $2 \times (n-1)$ conditions, il reste encore 2 **degrés de liberté**.

En général, pour terminer on prend $S''(x_0) = p_0''(x_0) = 0$ et $S''(x_n) = p_{n-1}''(x_n) = 0$ (splines naturelles) mais de nombreux autres choix sont possibles.

Illustration



Exercice : comment évaluer les coefficients f_i, f_i', f_i'' et f_i'''

1. Exprimer $p_i(x)$, $p_i'(x)$ et $p_i''(x)$ en fonction des f_i, f_i', f_i'' et f_i'''.
2. Montrer à partir de la condition $p_i(x_i) = y_i$ que
$$f_i = y_i \qquad i = 0, \dots, n-1$$
3. Notons $h_i = x_{i+1} - x_i$ pour $i = 0, \dots, n-1$ et $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$.
Montrer à partir de la condition $p_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ que
$$f_i' = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{f_i''}{2} h_i - \frac{f_i'''}{6} h_i^2 \qquad i = 0, \dots, n-1$$

Exercice : comment évaluer les coefficients f_i, f_i', f_i'' et f_i'''

4. Montrer à partir de la condition $p_i''(x_{i+1}) = p_{i+1}''(x_{i+1})$ que
$$f_i''' = \frac{f_{i+1}'' - f_i''}{h_i} \qquad i = 0, \dots, n-2$$

5. On pose $f_n'' = p_{n-1}''(x_n)$. On a donc $f_{n-1}''' = \frac{f_n'' - f_{n-1}''}{h_{n-1}}$. Montrer que
$$f_i' = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{1}{3} h_i f_i'' - \frac{1}{6} h_i f_{i+1}'' \qquad i = 0, \dots, n-1$$

6. Montrer à partir de la condition $p_i'(x_{i+1}) = p_{i+1}'(x_{i+1})$ que
$$h_i f_i'' + 2(h_i + h_{i+1}) f_{i+1}'' + h_{i+1} f_{i+2}'' = 6(f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}])$$
pour $i = 0, \dots, n-2$.

Il ne reste plus qu'à imposer f_0'' et f_n'' pour obtenir tous les coefficients.

Résumé construction spline cubique (cas splines naturelles)

But : déterminer les $4n$ coefficients : f_i, f_i', f_i'' et f_i''', $i = 0, \dots, n-1$.

- Cas splines naturelles, $f_0'' = f_n'' = 0$. Pour obtenir les f_i'' il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \dots \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ \dots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1'' \\ f_2'' \\ \vdots \\ f_{n-1}'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3(f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]) \\ 3(f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]) \\ \vdots \\ 3(f[x_{n-1},x_n]-f[x_{n-2},x_{n-1}]) \end{pmatrix}$$

La matrice est creuse, le système est facile à résoudre numériquement.

Résumé construction spline cubique (cas splines naturelles)

- On a automatiquement $f_i = y_i$ pour $i = 0, \dots, n-1$.
- On calcule les f_i' et f_i''' à partir des formules

$$f_i' = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{1}{3} h_i f_i'' - \frac{1}{6} h_i f_{i+1}'' \qquad i = 0, \dots, n-1$$

$$f_i''' = \frac{f_{i+1}'' - f_i''}{h_i} \qquad i = 0, \dots, n-1$$

et on obtient la fonction $\mathcal{C}^2$ spline cubique S tel que $S(x_i) = y_i$

Exercice : correction

1. Exprimer $p_i(x)$, $p_i'(x)$ et $p_i''(x)$ en fonction des f_i, f_i', f_i'' et f_i'''.

$$p_i(x) = f_i + f_i'(x - x_i) + \frac{f_i''}{2}(x - x_i)^2 + \frac{f_i'''}{6}(x - x_i)^3$$

$$p_i'(x) = f_i' + f_i''(x - x_i) + \frac{f_i'''}{2}(x - x_i)^2$$

$$p_i''(x) = f_i'' + f_i'''(x - x_i)$$

2. Montrer à partir de la condition $p_i(x_i) = y_i$ que

$$f_i = y_i \qquad i = 0, \ldots, n-1$$

$$p_i(x_i) = f_i + f_i'(x_i - x_i) + \frac{f_i''}{2}(x_i - x_i)^2 + \frac{f_i'''}{6}(x_i - x_i)^3 = f_i$$

$$p_i(x_i) = y_i \Longrightarrow f_i = y_i$$

Exercice : correction

3. Notons $h_i = x_{i+1} - x_i$ pour $i = 0, \dots, n-1$ et $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$. Montrer à partir de la condition $p_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ que

$$f_i' = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{f_i''}{2} h_i - \frac{f_i'''}{6} h_i^2 \qquad i = 0, \dots, n-1$$

$$p_i(x_{i+1}) = \underbrace{f_i}_{=y_i} + f_i' h_i + \frac{f_i''}{2} h_i^2 + \frac{f_i'''}{6} h_i^3 = y_{i+1}$$

$$f_i' h_i = y_{i+1} - y_i - \frac{f_i''}{2} h_i^2 - \frac{f_i'''}{6} h_i^3$$

En divisant par h_i, on trouve le résultat.

Exercice : correction

4. Montrer à partir de la condition $p_i''(x_{i+1}) = p_{i+1}''(x_{i+1})$ que

$$f_i''' = \frac{f_{i+1}'' - f_i''}{h_i} \qquad i = 0, \dots, n-2$$

$$p_i''(x_{i+1}) = f_i'' + f_i''' h_i = f_{i+1}'' = p_{i+1}''(x_{i+1})$$

En divisant par h_i, on trouve le résultat.

Exercice : correction

5. On pose $f''_n = p''_{n-1}(x_n)$. On a donc $f'''_{n-1} = \frac{f''_n - f''_{n-1}}{h_{n-1}}$. Montrer que

$$f'_i = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{1}{3}h_i f''_i - \frac{1}{6}h_i f''_{i+1} \qquad i = 0, \dots, n-1$$

$$f'_i = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{f''_i}{2}h_i - \frac{f'''_i}{6}h_i^2 = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{f''_i}{2}h_i - \frac{f''_{i+1} - f''_i}{6}h_i$$

D'où le résultat.

Exercice : correction

6. Montrer à partir de la condition $p_i'(x_{i+1}) = p_{i+1}'(x_{i+1})$ que

$$h_i f_i'' + 2(h_i + h_{i+1}) f_{i+1}'' + h_{i+1} f_{i+2}'' = 6(f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}])$$

pour $i = 0, \ldots, n-2$.

$$p_i'(x_{i+1}) = f_i' + f_i'' h_i + \frac{f_i'''}{2} h_i^2 = f_{i+1}' = p_{i+1}(x_{i+1})$$

$$f[x_i, x_{i+1}] - \frac{1}{3} h_i f_i'' - \frac{1}{6} h_i f_{i+1}'' + f_i'' h_i + \frac{f_{i+1}'' - f_i''}{2} h_i$$
$$= f[x_{i+1}, x_{i+2}] - \frac{1}{3} h_{i+1} f_{i+1}'' - \frac{1}{6} h_{i+1} f_{i+2}''$$

En simplifiant, on vérifie le résultat.