MASTÈRE DE MÉCANIQUE NUMÉRIQUE

Modèles mathématiques fondamentaux pour la mécanique

Jean-Antoine DÉSIDÉRI
desideri@sophia.inria.fr

9 novembre 1999

Remerciements

Ce document rassemble un ensemble de notes de différents cours enseignés antérieurement à l'Université de Nice avec plusieurs collègues : R. Abgrall, A. Dervieux, L. Fezoui, H. Guillard et B. Larrouturou dont la participation collective essentielle est ici amicalement saluée.

Table des matières

Chapitre 1

Classification des E.D.P. linéaires du second ordre

On considère une équation aux dérivées partielles (E.D.P.) du second ordre ayant la forme suivante :

$$\boxed{a\,u_{xx} + b\,u_{xy} + c\,u_{yy} + d\,u_x + e\,u_y + f\,u = g} \tag{1.1}$$

dans laquelle u est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ de 2 variables réelles $x$et y.

Définition 1.1 (linéarité)
L'équation (1.1) est linéaire ssi les coefficients a, b, ..., g sont fonctions uniquement de x et de y (et donc indépendants de u).

Pour simplifier, on suppose ici que les coefficients a, b, ..., g sont des constantes réelles.

Définition 1.2 (nature de l'E.D.P.)
On dit que l'équation (1.1) est :
(a) hyperbolique ssi $b^2 - 4ac > 0$,
(b) parabolique ssi $b^2 - 4ac = 0$,
(c) elliptique ssi $b^2 - 4ac < 0$.

Remarque : La terminologie utilisée dans cette définition est basée sur la classification des coniques du plan. On rappelle que la conique d'équation :

$$a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f = 0$$

est une hyperbole (resp. une parabole, une ellipse) ssi $b^2 - 4ac$ est positif (resp. nul, négatif).

Remarque : Si les coefficients a, b, ..., g dépendent des variables indépendantes x et y, le type de l'équation (1.1) est un caractère local. L'équation est hyperbolique au point (x_0,y_0) ssi $b(x_0,y_0)^2 - 4a(x_0,y_0)\,c(x_0,y_0) > 0$, etc.

Exercice 1.1 (Invariance du type de l'E.D.P. par changement de base)
On considère un changement de variables régulier :

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}$$

c'est-à-dire tel que les fonctions x et y des nouvelles variables ξ et η sont au moins de classe $\mathcal{C}^1$ et le jacobien

$$j = \xi_x\,\eta_y - \xi_y\,\eta_x$$

est uniformément fini et non-nul. Comment se transforme l'équation linéaire (1.1) dans le cas général où les coefficients a, b, ..., g peuvent dépendre de x et y ? Montrer que le type de l'E.D.P. est conservé.

Chapitre 2

Equations elliptiques

2.1. Origine physique, exemples

Les équations elliptiques régissent les problèmes stationnaires, d'« équilibre », généralement définis sur un domaine spatial borné Ω de frontière Γ sur laquelle l'inconnue est soumise à des conditions aux limites, le plus souvent de type Dirichlet, Neumann (ou Robin).

Un premier exemple classique est celui du calcul du déplacement vertical $u(x,y)$ d'une membrane dont le bord est fixé rigidement,

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

(condition de Dirichlet homogène), soumise à son poids $-\rho\, g$ (ρ : densité surfacique), ou plus généralement à une densité de force.

L'équilibre d'un élément de surface $\omega \subset \Omega$ de contour γ s'écrit en égalant l'intégrale de surface de cette force à la résultante des forces de tension exercées sur le bord :

$$\iint_{\omega} -\rho\, g\, d\omega = \int_{\gamma} k\, \overrightarrow{\nabla u}.\overrightarrow{n}\, d\gamma$$

En appliquant le théorème de la divergence, il vient

$$-\Delta u = f$$

où l'on a posé $f = \rho\, g/k$.

Un exemple très voisin est celui du calcul de la température (d'équilibre) d'un milieu borné Ω dont le bord Γ est maintenu à température fixe T_0. L'équilibre thermique d'un élément $\omega \subset \Omega$ du domaine s'écrit en égalant à zéro le flux thermique à

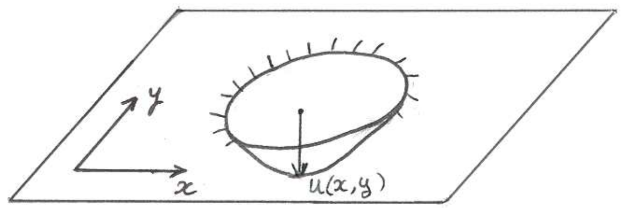

Figure 2.1. Déformation d'une membrane soumise à son poids

sa frontière :

$$\iint_{\omega} k\,\overrightarrow{\nabla T}.\overrightarrow{n}\; d\omega = 0 \quad \forall\,\omega$$

(k : conductivité thermique). A nouveau, le théorème de la divergence permet d'écrire l'équation locale suivante :

$$\overrightarrow{\nabla}.\left(k\,\overrightarrow{\nabla T}\right) = 0$$

($\overrightarrow{\nabla}.(\;) = \mathtt{div}(\;)$.) Dans le cas d'un milieu homogène ($k =$ constante), on aboutit à à l'équation de Laplace :

$$\Delta T = 0$$

Exercice 2.1 (calcul de la température d'équilibre)
Calculer la température d'équilibre d'une plaque carrée de côté a dont trois côtés sont maintenus à la température T_0 et le quatrième à la température T_1. (Poser $u = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$ et utiliser la technique de séparation des variables.)

En mécanique des fluides, l'équation de continuité ou de conservation de la masse dans le cas d'un écoulement plan et permanent d'un fluide parfait et incompressible ($\rho =$ constante) s'écrit :

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{V} = 0$$

où

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

est le champ inconnu de vitesses. Lorsque les conditions aux limites ne sont pas source de vorticité, l'écoulement est de plus irrotationnel :

$$\mathtt{rot}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = 0$$

Dans ce cas, le champ de vitesses dérive d'une fonction potentielle, $\phi(x,y)$, dite « potentiel des vitesses » :

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla\phi}$$

En conséquence, le potentiel ϕ est une « fonction harmonique », c'est-à-dire une solution de l'équation de Laplace :

$$\Delta\phi = 0$$

2.2. Equation type

On considère l'équation (1.1), et on suppose :

$$b^2 - 4ac < 0$$

Soit λ_1 et λ_2 les deux racines complexes conjuguées de l'équation :

$$a\,\lambda^2 - b\,\lambda + c = 0 \tag{2.1}$$

En introduisant le changement de variables défini par :

$$\begin{cases} \xi + \imath\,\eta = y - \lambda_1\,x \\ \xi - \imath\,\eta = y - \lambda_2\,x \\ v = u\,e^{-\alpha\xi-\beta\eta} \end{cases}$$

(où α et β sont des constantes réelles convenablement choisies), l'équation (1.1) prend la forme canonique suivante :

$$\boxed{v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + C\,v = h(\xi,\eta)}$$

Exercice 2.2 (forme canonique de l'équation elliptique)
Etablir cette équation.

Le problème elliptique type est donc celui fourni par l'équation de Laplace (ou de Poisson) soumise à des conditions aux limites, par exemple de Dirichlet :

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}} \tag{2.2}$$

Lorsque $u_0 = 0$ les conditions au bord sont dites de Dirichlet homogènes.

2.3. Formulation variationnelle

On rappelle la formule suivante d'intégration par parties pour des fonctions u et v régulières :

$$\iint_\Omega -\Delta u . v = \iint_\Omega -\mathtt{div}(\overrightarrow{\nabla u}) . v = \iint_\Omega \overrightarrow{\nabla u} . \overrightarrow{\nabla v} - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} . v$$

Par conséquent, si u est une solution classique (« régulière », dans H^2), du problème homogène ($u_0 = 0$), alors :

$$\boxed{u \in H_0^1 \text{ et } \forall\, v \in H_0^1 \;:\; \iint_\Omega \overrightarrow{\nabla u} . \overrightarrow{\nabla v} = \iint_\Omega f . v} \tag{2.3}$$

Cette nouvelle formulation, dite « faible », permet de se libérer de la condition de régularité ($u \in H^2$). C'est la formulation que l'on discrétise en Eléments Finis.

Le problème variationnel ci-dessus admet une solution unique en vertu du théorème suivant :

Théorème 2.1 (Lax-Milgram)
Etant donné un espace de Hilbert V (i.e. un espace vectoriel normé, complet), une forme bilinéaire a continue et cœrcive (i.e. $\exists\, \alpha > 0$ $\mathtt{tq}$ $\forall\, u$, $a(u,u) \geq \alpha \, \|u\|^2$), une forme linéaire continue L, le problème

$$\| \textit{ Trouver } u \in V \textit{ tq } \forall\, v \in V ,\, a(u,v) = L(v)$$

admet une solution unique.

On admettra ce théorème. Enfin, on cite le théorème très important suivant :

Théorème 2.2 (Principe du maximum)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ assez régulière. Soit $u \in H^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u \geq 0$ dans Ω et $u \geq 0$ sur Γ; alors : $u \geq 0$ dans Ω.

En particulier, si u est solution de l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

et si l'on pose

$$m_0 = \min\, u_0 = \min_\Gamma\, u \,, \quad M_0 = \max\, u_0 = \max_\Gamma u$$

en appliquant le théorème précédent aux fonctions $u - m_0$ et $M_0 - u$, on voit que m_0 et M_0 sont également le minimum et le maximum de la fonction $u(x,y)$ dans le domaine Ω en entier (et non pas seulement sur le bord).

Chapitre 3

Equations paraboliques

3.1. Origine physique, exemples

Les équations paraboliques régissent les problèmes « d'évolution » ou « instationnaires » dans lesquels intervient le mécanisme de « diffusion » ou de « dissipation ». Ces problèmes sont généralement définis sur un domaine spatial borné Ω de frontière Γ sur laquelle l'inconnue est soumise à des conditions aux limites du même type qu'en elliptique (quelquefois cependant elles-mêmes instationnaires), ainsi qu'à des conditions initiales.

Un exemple classique est celui du calcul de la température $T(x,t)$ au cours du temps ($t \geq 0$) dans une barre cylindrique homogène, de section constante ($0 \leq x \leq a$). La température initiale de la barre est connue :

$$T(x,0) = \theta_0(x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

où $\theta_0(x)$ n'est pas nécessairement une fonction continue. De plus, à partir de l'instant initial, on impose des conditions aux deux extrémités de la barre; celles-ci peuvent être par exemple des conditions de Dirichlet :

$$\forall\, t > 0 \ : \quad T(0,t) = T_0\,, \quad T(a,t) = T_1$$

Le bilan énergétique de la tranche de barre située entre les abscisses x et $x + dx$ s'exprime comme suit : la variation d'énergie interne (de la tranche) est égale au flux de chaleur reçue (par unité de temps) :

$$\underbrace{\rho\,\delta x}_{\delta m}\; C\,\frac{\partial T}{\partial t} = q(x) - q(x + dx)$$

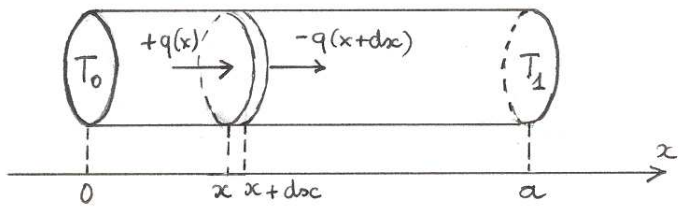

Figure 3.1. Problème de la température dans une barre cylindrique homogène.

(ρ : masse linéïque; C : capacité calorifique spécifique). Par ailleurs, le flux thermique s'exprime par la loi de Fourier :

$$q(x) = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

(k : conductivité thermique). Il vient ($\delta x \to 0$) :

$$T_t = \alpha T_{xx}$$

où $\alpha = k/(\rho C) > 0$.

Exercice 3.1 (évolution de la température dans une barre)
Résoudre formellement le problème du calcul de la température dans la barre connaissant T_0, T_1 ainsi que la condition initiale $\theta_0(x)$. (Poser $u(x,t) = (T(x,t) - T_0)/(T_1 - T_0) - x/a$ et utiliser une décomposition de Fourier de $u(x,t)$ en x dont les coefficients sont des fonctions inconnues de t.)

Exercice 3.2 (condition de Neumann)
Quelle serait l'interprétation physique d'une condition au bord de type Neumann ?

Dans le cas multidimensionnel, la température dans un milieu homogène évolue selon l'équation suivante :

$$T_t = \alpha \Delta T \quad (\alpha > 0)$$

dite « équation de la chaleur ».

3.2. Equation type

On considère à nouveau l'équation (1.1), en supposant ici que l'on a :

$$b^2 - 4ac = 0$$

L'équation

$$a\,\lambda^2 - b\,\lambda + c = 0 \tag{3.1}$$

admet la racine double $b/(2a)$. En introduisant le changement de variables défini par :

$$\begin{cases} \xi = y - \dfrac{b}{2a}\,x \\ \eta = y - \lambda\,x \\ v = u\,e^{-\alpha\xi-\beta\eta} \end{cases}$$

(où α, β et λ sont des constantes réelles convenablement choisies), l'équation (1.1) prend la forme canonique suivante :

$$\boxed{v_\xi - v_{\eta\eta} + C\,v = h(\xi,\eta)}$$

Exercice 3.3 (forme canonique de l'équation parabolique)
Etablir cette équation.

Le problème parabolique type est donc celui fourni par l'équation de la chaleur soumise à des conditions aux limites, par exemple de Dirichlet, ainsi qu'à des conditions initiales :

$$\boxed{\begin{cases} u_t = \alpha\,\Delta u \quad \text{dans } \Omega \quad (\alpha > 0) \\ u = u_0 \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \\ u(x,0) = u_1(x) \quad \text{dans } \Omega \end{cases}} \tag{3.2}$$

Lorsque $u_0 = 0$ les conditions au bord sont dites de Dirichlet homogènes.

3.3. Propriétés

Théorème 3.1 (Principe du maximum)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ assez régulière. Soit $u \in H^1(\Omega)$ telle que $u_t - \alpha\,\Delta u \geq 0$ dans $\Omega \times [0,T]$ et $u \geq 0$ sur $\Gamma \times [0,T]$ et $u(x,0) \geq 0$ dans Ω, alors : $u \geq 0$ dans $\Omega \times [0,T]$.

<u>Démonstration :</u>
Pour la commodité du raisonnement on inverse les signes et on suppose plutôt que $u_t - \alpha\,\Delta u \leq 0$ (dans $\Omega \times [0,T]$), $u \leq 0$ (sur Γ) et $u(x,0) \leq 0$ dans Ω. On pose :

$$u^+(x,t) = \max\Big(u(x,t),0\Big)$$

et il faut montrer que $u^+(x,t) = 0$. On a $u^+ \geq 0$ de sorte que :

$$u^+\, u_t - \alpha\, u^+\, \Delta u \leq 0$$

Pour x fixé, sur un intervalle de temps où $u^+ \neq 0$, $u = u^+$ et l'on a :

$$u^+\, u_t = u\, u_t = \tfrac{1}{2}\,(u^2)_t = \tfrac{1}{2}\,\Big((u^+)^2\Big)_t$$

Ce résultat reste vrai trivialement dans le cas inverse d'un intervalle où $u^+ = 0$. Par intégration dans le domaine Ω, il vient :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (u^+)^2 + \alpha\int_\Omega \underbrace{\nabla u.\nabla u^+}_{=\nabla u^+.\nabla u^+\geq 0} - \alpha\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}.\underbrace{u^+}_{=0 \text{ sur } \Gamma} \leq 0$$

Par conséquent,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (u^+)^2 \leq 0$$

et

$$\forall\, t\,, \quad \int_\Omega (u^+)^2 \leq \int_\Omega \Big(u^+(x,0)\Big)^2 = 0$$

et enfin :

$$u^+(x,t) = 0\,, \quad \forall\, x \in \Omega\,, \forall\, t \geq 0$$

□

En particulier, si u est solution du problème de la chaleur (3.2), et si l'on pose

$$m_0 = \min\, u_0 = \min_\Gamma\, u\,, \quad M_0 = \max\, u_0 = \max_\Gamma u$$

et si la condition initiale satisfait également :

$$\forall\, x \in \Omega\,, m_0 \leq u_1(x) \leq M_0$$

en appliquant le théorème précédent aux fonctions $u - m_0$ et $M_0 - u$, on voit que m_0 et M_0 sont également le minimum et le maximum de la fonction $u(x,t)$ dans le domaine Ω en entier à tout instant ultérieur $t > 0$ (et non pas seulement à $t = 0$).

b) Effet régularisant

La solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u_t - \alpha\, u_{xx} = 0\,, & x \in \mathbb{R}\,,\, t \geq 0 \quad (\alpha > 0) \\ u(x,0) = u_1(x) \end{cases}$$

(où $u_1 \in L^1(\mathbb{R})$) est donnée par :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\dfrac{(x-y)^2}{4\alpha t}}\, u_1(y)\, dy$$

Par conséquent, u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}+$: c'est l'effet régularisant instantané.

De plus, si $u_1 > 0$ sur $[a,b]$ et nul ailleurs, à tout instant $t > 0$ (aussi petit soit-il), $u(x,t) > 0$ (pour tout x) : l'information a « diffusé » instantanément sur la totalité du domaine infini (vitesse infinie de propagation).

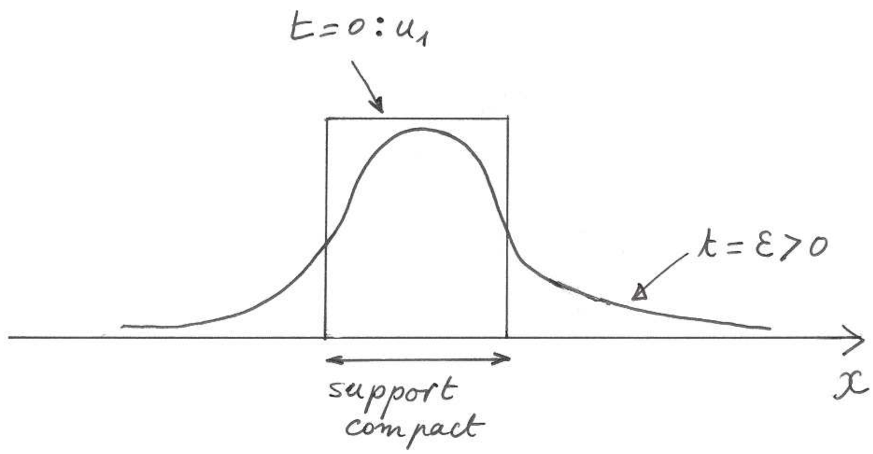

Figure 3.2. Intégration de l'équation de la chaleur à partir d'un signal carré : (a) effet régularisant; (b) diffusion instantannée sur le domaine infini.

Chapitre 4

Equations hyperboliques

4.1. Origine physique, exemples

Les problèmes hyperboliques modélisent la propagation d'ondes sans dissipation.

En linéaire, ces phénomènes superposition d'ondes simples, comme la propagation du son dans un milieu homogène. En électromagnétisme, les équations de Maxwell sont également hyperboliques et linéaires.

En non linéaire, les équations hyperboliques sont l'expression de lois de conservation. Par exemple, les équations d'Euler de la mécanique des fluides expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale dans un fluide parfait compressible.

4.2. Equations types

On considère l'équation (1.1), et on suppose :

$$b^2 - 4ac > 0$$

Soit λ_1 et λ_2 les deux racines réelles et distinctes de l'équation :

$$a\,\lambda^2 - b\,\lambda + c = 0 \tag{4.1}$$

En introduisant le changement de variables défini par :

$$\begin{cases} \xi + \eta = y - \lambda_1\,x \\ \xi - \eta = y - \lambda_2\,x \\ v = u\,e^{\alpha\xi + \beta\eta} \end{cases}$$

(où α et β sont des constantes réelles convenablement choisies), l'équation (1.1) prend la forme canonique suivante :

$$\boxed{v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + C\,v = h(\xi,\eta)}$$

Exercice 4.1 (forme canonique de l'équation hyperbolique)
Etablir cette équation.

C'est l'équation des ondes. Une première équation-type du cas hyperbolique est l'équation des ondes homogène :

$$\boxed{u_{tt} - c^2\,u_{xx} = 0} \tag{4.2}$$

Exercice 4.2 (résolution de l'équation des ondes)
Résoudre l'équation des ondes dans le cas des conditions suivantes

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Posons maintenant :

$$w_1 = u_t\,, \quad w_2 = u_x\,; \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

L'équation (4.2) peut alors s'écrire :

$$w_t + A\,w_x = 0\,, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

C'est la deuxième forme-type du cas hyperbolique qui conduit à la définition suivante :

Définition 4.1 (hyperbolicité d'un système linéaire d'E.D.P.)
Soit A un matrice carrée $n \times n$. Le système linéaire du premier ordre :

$$\boxed{w_t + A\,w_x = 0} \tag{4.4}$$

où $x \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{R}^n$ est dit hyperbolique ssi A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$; autrement dit, s'il existe une matrice réelle et inversible X et une matrice diagonale réelle Λ (chacune de dimension $n \times n$) telles que :

$$A = X \, \Lambda \, X^{-1}$$

On vérifie aisément que le système (4.3) est hyperbolique.

Dans le cas « scalaire » où $n = 1$, le système (4.4) se ramène à l'« équation d'advection pure » ou de « convection »[1] :

$$\boxed{u_t + c \, u_x = 0 \,, \quad u \in \mathbb{R}} \tag{4.5}$$

Cette équation malgré son extrème simplicité est souvent utilisée dans l'analyse, notamment de stabilité, des schémas numériques pour l'hyperbolique.

Exercice 4.3 (résolution de l'équation d'advection pure)
Résoudre l'équation d'advection pure dans les deux cas suivants :

a) $\begin{cases} \Omega = \mathbb{R} \,, \; t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \Omega = \mathbb{R}+ \;, \; t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}+) \\ u(0,t) = u_1(t) \quad (t \geq 0 \,; \; u_1(0) = u_0(0)) \end{cases}$

Exercice 4.4 (résolution de l'équation des ondes par l'étude du système)
Résoudre l'équation des ondes mise sous la forme du système (4.3).

4.3. Caractéristiques

a) On considère l'équation hyperbolique :

$$\boxed{a \, u_{xx} + b \, u_{xy} + c \, u_{yy} = 0 \,, \quad b^2 - 4ac > 0} \tag{4.6}$$

Le long d'une courbe plane paramétrée $\Big(x(s),y(s)\Big)$, on a :

$$\frac{d}{ds} \, u_x \Big(x(s),y(s)\Big) = u_{xx} \, x_s + u_{xy} \, y_s$$

1. Certains auteurs utilisent une terminologie plus restrictive, réservant le terme de convection à un phénomène hyperbolique non linéaire.

et

$$\frac{d}{ds}\,u_y\Big(x(s),y(s)\Big) = u_{xy}\,x_s + u_{yy}\,y_s$$

Regroupant sous forme matricielle les trois dernieres égalités, il vient :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ x_s & y_s & 0 \\ 0 & x_s & y_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d/ds\,u_x \\ d/ds\,u_y \end{pmatrix}$$

Appelons L_1, L_2, L_3 les trois lignes de la matrice 3×3 ci-dessus. Si le rang de cette matrice est inférieur ou égal à 2, une combinaison linéaire (au mois) de ses lignes est nulle :

$$\exists\,(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \neq (0{,}0{,}0) \ \ \texttt{tq :}\ \ \alpha_1\,L_1 + \alpha_2\,L_2 + \alpha_3\,L_3 = 0$$

Le système précédent étant compatible quel que soit le choix de la courbe paramétrée, on a alors nécessairement :

$$\alpha_1\,0 + \alpha_2\,\frac{d}{ds}\,u_x + \alpha_3\,\frac{d}{ds}\,u_y = 0$$

Cette observation conduit aux définitions suivantes :

Définition 4.2 (direction caractéristique)
En un point (x_0,y_0), la direction (x_s,y_s) est une direction caractéristique pour l'équation (4.6) ssi le déterminant

$$\begin{vmatrix} a(x_0,y_0) & b(x_0,y_0) & c(x_0,y_0) \\ x_s & y_s & 0 \\ 0 & x_s & y_s \end{vmatrix}$$

est nul.

Définition 4.3 (courbe caractéristique)
La courbe plane $\Big(x(s),y(s)\Big)$ est une caractéristique ssi elle est en chacun de ses points (x_0,y_0) tangente à la direction caractéristique en ce point.

En développant le déterminant ci-dessus, on obtient l'équation donnant les directions caractéristiques :

$$a(x_0,y_0)\,y_s^2 - b(x_0,y_0)\,x_s\,y_s + c(x_0,y_0)\,x_s^2 = 0$$

Les deux propriétés suivantes apparaîssent maintenant clairement :

$\underline{\mathcal{P}_1 :}$ L'équation hyperboique (4.6) admet en tout point deux directions caractéristiques.

$\underline{\mathcal{P}_2}$: Le long d'une caractéristique, une fonction u vérifiant (4.6), satisfait une relation du type :

$$\alpha_2(s)\,\frac{d}{ds}\,u_x + \alpha_3(s)\,\frac{d}{ds}\,u_y = 0$$

Remarque : Dans le cas où les coefficients $a,\ b,\ c$ sont constants, les caractéristiques sont des droites, α_2 et α_3 ne dépendent pas de s.

Exercice 4.5 (ondes et advection pure par les caractéristiques)
Refaire les exercices 4.2 et 4.3 en utilisant les caractéristiques.

Exercice 4.6 (forme canonique associée aux variables caractéristiques)
On se place dans le cadre de l'exercice 1.1 et on suppose de plus que les courbes d'équations $\xi =$ constante et $\eta =$ constante constituent les deux familles de courbes caractéristiques. Quelle est la forme prise par l'équation (1.1) dans le nouveau système de coordonnées ? (Indications : évaluer la pente $dy/dx = y_s/x_s$ d'une courbe d'équation $\xi(x,y) =$ constante; utiliser un résultat du cours pour en déduire que dans le cas particulier où cette courbe est une caractéristique, on a :

$$a\,\xi_x^2 + b\,\xi_x\,\xi_y + c\xi_y^2 = 0$$

et de même pour la courbe caractéristique d'équation $\eta =$ constante :

$$a\,\eta_x^2 + b\,\eta_x\,\eta_y + c\eta_y^2 = 0$$

combiner ces résultats à ceux de l'exercice 1.1 et conclure.)

b) Considérons maintenant un système hyperbolique linéaire d'ordre n, à coefficients non constants :

$$\boxed{w_t + A(x,t)\,w_x = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,\ t \geq 0\,, w(x,t) \in \mathbb{R}^n} \tag{4.7}$$

Le long d'une courbe $\Big(x(s),t(s)\Big)$, on a :

$$\frac{d}{ds}\,w\Big(x(s),t(s)\Big) = w_x\,x_s + w_t\,t_s = (x_s\,I - t_s\,A)\ w_x$$

En raisonnant comme précédemment, on est conduit à poser la définition suivante :

Définition 4.4 (direction caractéristique pour un système)
Au point (x_0,t_0), la direction (x_s,t_s) est une direction caractéristique pour le système (4.7) ssi :

$$\mathtt{det}\,(x_s\,I - t_s\,A) = 0$$

Les caractéristiques sont définies comme précédemment. La propriété $\mathcal{P}_1$ s'écrit maintenant comme suit :

$\mathcal{P}_3$: Le système hyperbolique (4.7) admet en tout point (x_0,t_0) n directions caractéristiques (non nécessairement distinctes) définies par :

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \lambda_i \,, \quad 1 \leq i \leq n}$$

où λ_i est une valeur propre de la matrice $A(x_0,t_0)$.

Pour l'analogue de $\mathcal{P}_2$, on renvoie à l'exercice suivant :

Exercice 4.7
[résolution d'un système linéaire par les caractéristiques] Résoudre le système hyperbolique (4.7) par la méthode des caractéristiques en supposant connue la condition initiale.

c) Domaines de dépendance et d'influence

Les exercices précédents ont montré que les problèmes suivants sont bien posés :

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\, u_{xx} = 0 \,, \quad x \in \mathbb{R} \,, \, t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{4.8}$$

et :

$$\begin{cases} w_t + A\, w_x = 0 \,, \quad x \in \mathbb{R} \,, \, t \geq 0 \,, w \in \mathbb{R}^n \\ w(x,0) = w^0(x) \,, \quad A \,:\, n \times n \text{ et diagonalisable} \end{cases} \tag{4.9}$$

Pour chacun de ces problèmes, (4.8) et (4.9), on a mis en évidence, en tout point fixé (x_0,t_0) du demi-plan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}+$, un intervalle $\mathcal{D}_0$ de $\mathbb{R}$ tel que la valeur de la solution en (x_0,t_0) ne dépende pas des données initiales sur $\mathbb{R} - \mathcal{D}_0$. Le plus petit intervalle $\mathcal{D}_0$ ayant cette propriété est le « domaine de dépendance du point (x_0,t_0) ».

L'existence d'un tel domaine de dépendance est une propriété fondamentale des problèmes hyperboliques.

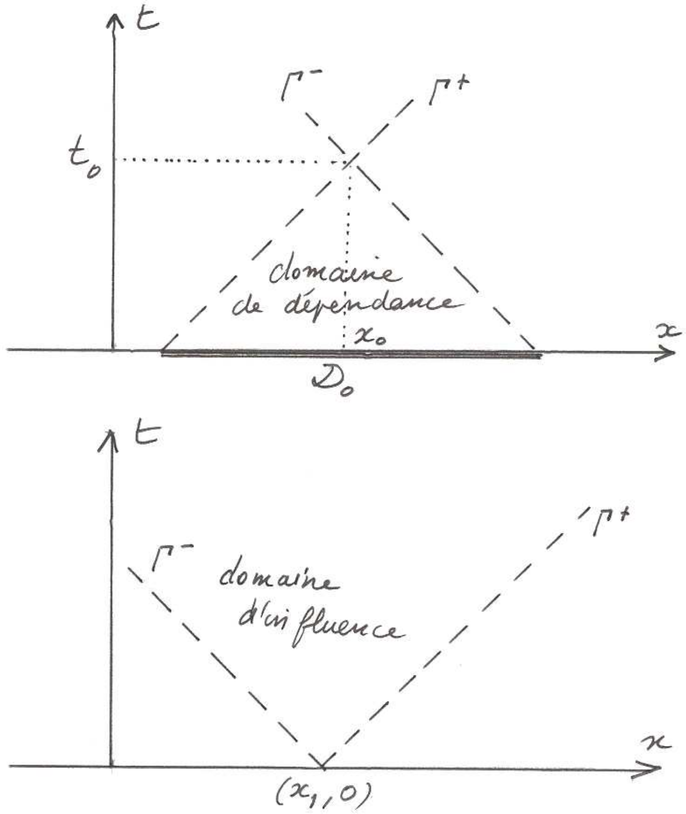

Figure 4.1. Domaine de dépendance du point (x_0,t_0) et domaine d'influence du point $(x_1,0)$

Réciproquement le « domaine d'influence » d'un point $(x_1,0)$ est l'ensemble des points (x_0,t_0) du demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}+$ dont le domaine de dépendance contient le point $(x_1,0)$.

Exercice 4.8 (étude d'un problème aux valeurs initiales particulier)
Etudier le problème aux valeurs initiales suivant :

$$\begin{cases} u_{xy} = 0 \quad (x \geq 0\,, y \geq 0) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_y(x,0) = g(x) \end{cases}$$

4.4. Problèmes non linéaires

a) On va maintenant étudier sommairement des problèmes du type suivant (« lois de conservation ») :

$$\boxed{\begin{cases} w_t + \Big(f(w)\Big)_x = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,\, t \geq 0\,,\, w \in \mathbb{R}^n\,,\, f(w) \in \mathbb{R}^n \\ w(x,0) = w_0(x) \end{cases}} \tag{4.10}$$

où f est une fonction non linéaire $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ dite « fonction de flux ». Le système (4.10) est dit « sous forme conservative » ou « forme divergence ». Dans les exemples, on utilisera souvent l'équation scalaire :

$$\boxed{\begin{cases} u_t + \left(\dfrac{u^2}{2}\right)_x = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,\, t \geq 0\,,\, u \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}} \tag{4.11}$$

C'est l'équation de Burgers.

Si $w(x,t)$ est une solution régulière vérifiant (4.10), on peut évaluer $\Big(f(w)\Big)_x$ en utilisant les règles de dérivation des fonctions composées. On obtient alors le système suivant, dit « sous forme non-conserative » :

$$\boxed{w_t + A(w)\, w_x = 0} \tag{4.12}$$

où la matrice $A(w) = f'(w)$ est le jacobien de f : $A_{ij} = \partial f_i(w)/\partial w_j$.

La forme non conservative de l'équation de Burgers s'écrit alors :

$$u_t + u\, u_x = 0 \tag{4.13}$$

L'analogie entre les équations (4.12) et (4.4) conduit à la définition suivante :

Définition 4.5 (hyperbolicités des systèmes non linéaires)
Les systèmes (4.10) et (4.12) sont dits hyperboliques ssi la matrice $A(w)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ pour tout w de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4.9 (l'expérience « choc » pour une équation hyperbolique non linéaire) A l'exercice 4.7 notamment, on a explicité la solution exacte d'un système hyperbolique linéaire général par le biais de la diagonalisation de la matrice A ce qui a permis de mettre en évidence que la solution du problème conservait au cours du temps la régularité de la condition initiale. Cet exercice a pour but de démontrer que cette propriété est généralement caduque lorsque le système hyperbolique est non linéaire.
Pour cela, utiliser la méthode des caractéristiques pour tenter de résoudre (4.10) dans le cas scalaire ($n = 1$). Donner des exemples de tels problèmes pour lesquels il n'existe pas de solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.
Etudier en détail le cas de l'équation de Burgers dans les cas particuliers suivants :
a) $u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $u_0(-1) = 1$, $u_0(1) = -1$.
b)

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

c)

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

b) L'exercice précédent fait apparaître quelques particularités des problèmes hyperboliques non linéaires :

– les directions caractéristiques dépendent de la solution;
– même dans le cas où les données (les fonctions f et w_0) sont régulières, il n'existe pas nécessairement de solution régulière, il y a formation de chocs.

Sans chercher à définir les chocs de façon précise, disons pour l'instant qu'il s'agit d'une discontinuité située aux points de croisement (ou de coalescence) de caractéristiques différentes.

Pour l'équation de Burgers, (4.11), il y a formation de chocs dès lors que la donnée initiale u_0 n'est pas une fonction croissante de x. Ce phénomène de développement de discontinuité à partir d'une donnée initiale régulière est typiquement (hyperbolique) non linéaire.

c) Solutions fortes et faibles

Il est donc nécessaire de définir ce qu'est une solution de (4.10) qui ne soit pas (nécessairement) $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}+$. On fait pour cela appel à la théorie des distributions :

Définition 4.6 (solution faible du problème (4.10))
w est une solution faible du problème (4.10) ssi :

$$\begin{cases} w \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}+) \,,\; f(w) \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}+) \,, \\ \displaystyle\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}+} \left(w\, \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(w)\, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \, dx\, dt = - \int_{\mathbb{R}} w_0(x)\, \phi(x,0)\, dx \,, \\ \text{pour tout } \phi \text{ de régularité } \mathcal{C}^\infty \text{ et à support compact dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}+ \end{cases}$$

On vérifie aisément qu'une solution classique de (4.10) (c'est-à-dire de régularité $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}+$) est aussi une solution faible.

Avant d'utiliser la définition précédente en l'appliquant à quelques cas simples, on va étudier de façon plus détaillée la propagation des discontinuités correspondant aux solutions faibles de (4.10).

d) Soit w une solution faible de (4.10). On suppose que w est discontinue long d'une courbe Γ. On suppose également que Γ est régulière et sépare le demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}+$ en deux régions Ω_1 et Ω_2. On suppose enfin que les restrictions w_1 et w_2 de w à Ω_1 et Ω_2 respectivement sont régulières.

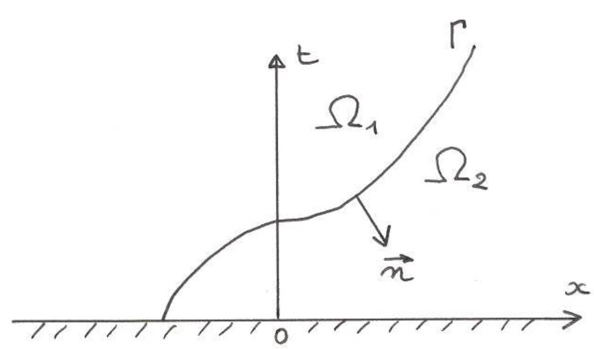

Figure 4.2. Propagation d'une onde de choc

On désigne par $\overrightarrow{n} = (n_x,n_t)$ la normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω_1.

Soit ϕ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}+$. On a :

$$\iint_{\Omega_1} \left(w_1 \, \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(w_1) \, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \, dx \, dt + \iint_{\Omega_2} \left(w_2 \, \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(w_2) \, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \, dx \, dt = 0 \tag{4.14}$$

La fonction w_1 étant régulière dans Ω_1, on a :

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + A(w_1) \, \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0$$

les dérivées étant prises au sens classique. Il est alors licite d'intégrer par parties le premier terme de (4.14). On obtient les termes suivants :

$$\iint_{\Omega_1} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \, \phi + \frac{\partial f(w_1)}{\partial x} \, \phi \right) \, dx \, dt + \int_\Gamma \, (w_1 \, \phi \, n_t + f(w_1) \, \phi \, n_x) \, d\gamma$$

dont le premier est nul. Après un traitement analogue du terme en w_2, on peut réécrire (4.14) sous la forme suivante :

$$\int_\Gamma \Big((w_1 - w_2) \, n_t + (f(w_1) - f(w_2)) \; n_x \Big) \, d\gamma = 0$$

Ceci étant vrai pour tout ϕ (de régularité $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}+$), il vient :

$$(w_1 - w_2) \, n_t + (f(w_1) - f(w_2)) \; n_x = 0$$

On introduit alors la « vitesse de propagation » de la discontinuité :

$$\sigma = \left(\frac{dx}{dt} \right)_\Gamma = -\frac{n_t}{n_x}$$

On obtient donc la relation suivante, dite « <u>relation de saut</u> », liant la vitesse de propagation du choc aux sauts de l'inconnue w et de la fonction de flux $f(w)$:

$$\boxed{\; [\, f \,] = \sigma \; [\, w \,] \;}$$

où l'on a introduit la notation suivante pour les sauts :

$$[\, w \,] = w_1 - w_2 \, , \quad [\, f \,] = f(w_1) - f(w_2) \, .$$

L'application de cette formule aux équations d'Euler monodimensionnelles qui régissent le mouvement d'un fluide parfait compressible, fournit les célèbres « relations de Rankine-Hugoniot ».

Exercice 4.10 (relation de saut et changement de variables non linéaire)
Répercuter le changement de variable non linéaire $u = v^\alpha$ ($\alpha \neq 1$ et -1) dans l'équation de Burgers. Ecrire les équations satisfaites par la variable v sous forme conservative et non conservative, ainsi que les relations de saut pour $[\, v \,]$.

Exercice 4.11 (résolution de l'équation de Burgers)
Utiliser les relations de saut pour résoudre l'équation de Burgers dans les cas b) et c) de l'exercice 4.9.

e) L'exercice précédent montre qu'il n'y a pas unicité de la solution faible.

Pour que le problème (1.1) soit bien posé (c'est-à-dire admette une solution unique), il convient d'ajouter un critère, l'inégalité d'entropie. Précisons tout de suite que cela n'est en général pas suffisant pour assurer que (1.1) soit bien posé.

Nous ne donnerons pas une description générale du critère d'entropie. Ce critère est lié au caractère irréversible de l'évolution de la solution au cours du temps lorsque des chocs existent. En d'autres termes, un choc satisfaisant le critère d'entropie correspond à une perte d'information. Un point (x_0,t_0) d'un tel choc est le lieu de collision de caractéristiques issues de la région $t < t_0$. Si au contraire, un point (x_0,t_0) d'un choc est le lieu de départ de deux caractéristiques dirigées vers la région $t > t_0$, le critère d'entropie est violé (solution faible « non physique »). (Voir Figure 4.3.) Ces considérations sont illustrées par l'exercice précédent.

Exercice 4.12 (recherche de condition initiale)
Pour l'équation de Burgers, trouver la condition initiale donnant

$$u(x,2) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

f) Une méthode importante et fructueuse permettant de traiter le problème de l'absence d'unicité des solutions faibles de (4.10), consiste à considérer le système :

$$(w_\varepsilon)_t + \Big(f\,(w_\varepsilon)\Big)_x = \varepsilon\,\Delta w_\varepsilon \tag{4.15}$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre de « viscosité ». Dans certains cas, le problème physique d'origine modélisé par (4.10) comportait des termes de viscosité négligés jusqu'ici. Dans d'autres cas, le terme $\varepsilon\,\Delta w_\varepsilon$ ne provient pas de la modélisation physique : on parle alors de « viscosité artificielle ».

Les deux points essentiels concernant l'équation (4.15) sont les suivants :

– Les solutions w_ε de (4.15) sont régulières, les chocs ont disparu. (Voir chapitre 3 : équations paraboliques.)
– Si w est une solution faible de (4.10), et si w est la limite (dans un sens à préciser) lorsque $\varepsilon \to 0$ de solutions w_ε de (4.15), alors w satisfait le critère d'entropie : c'est la solution du système (4.10).

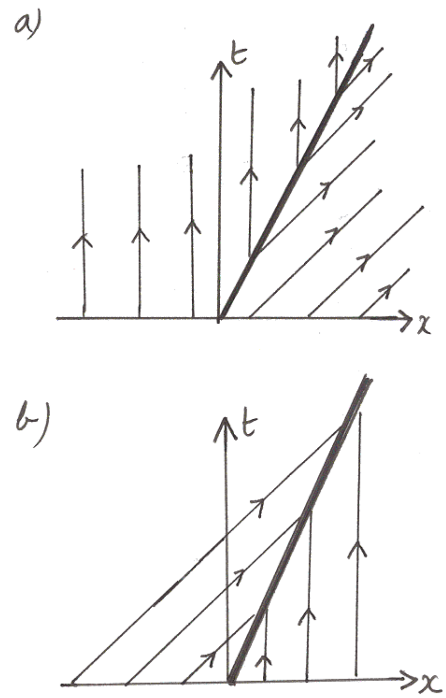

Figure 4.3. Deux solutions faibles associées à la même formulation : (a) caractéristiques divergentes à partir du choc : solution non physique; (b) caratéristiques convergentes sur le choc : le choc absorbe l'information, solution entropique.

Bibliographie

[1] Anderson, D.A., Tannehill, J.C. & Pletcher, R.H. (1984) : *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York.

[2] Dautray, R. & Lions, J.L. (1984) : *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, Collection du Commissariat à l'Energie Atomique, Série Scientifique, Tome 1, Masson (Paris – New York), 1984 ; Notamment : Chap. II : L'opérateur de Laplace.