

Une approche algébrique pour de nouveaux paradigmes en estimation et dérivation numérique

Non-A (ALIEN), présenté par : Wilfrid Perruquetti*

23 juin 2011

1 Résumé

De nombreux problèmes pratiques et importants pour l'ingénieur concernent l'**estimation** de grandeurs d'origines divers : paramètres, variables d'état, perturbation, . . . , dérivées de signaux bruité (**dérivation numérique**). Pour n'illustrer et ne préciser que quelques uns de ces problèmes pratiques, citons :

- pour l'**estimation de paramètres** : l'identification des paramètres dynamiques d'un processus (par exemple, d'un robot), l'estimation du triplet (amplitude, phase, fréquence) d'un signal sinusoïdal biaisé en environnement bruité, . . .
- pour la **dérivation numérique** : l'obtention de la vitesse à partir d'une mesure bruitée de la position, la reconstruction de l'état¹ à partir des mesures bruitées . . .

Précisons brièvement les principales approches communément utilisées :

L'estimation de paramètres consiste à déterminer une bonne approximation des paramètres inconnus à partir du signal mesuré qui est la somme d'un signal dépendant implicitement des paramètres cherchés et d'un bruit. Ainsi de nombreuses méthodes ont été développées comme la régression linéaire ou non [30], les méthodes de sous-espaces [25], le filtre de Kalman étendu [3], les filtres à encoches, ou, encore, d'autres techniques issues de la commande adaptative non linéaire [4], etc.... *Cependant, l'estimation de ces paramètres en une fraction de période du signal de façon robuste, en présence de bruit et de perturbation*

*Non-A INRIA-Lille Nord Europe & École Centrale de Lille, LAGIS (CNRS), email : Wilfrid.Perruquetti@inria.fr

1. L'observabilité d'un système qu'il soit linéaire ou non est équivalente à la possibilité d'exprimer toutes les variables d'état en fonction des dérivées de la sortie et de l'entrée (en nombres finis) : voir [8, 9].

*structurée*², n'est pas encore complètement résolue par ces techniques évoquées ci-dessus.

La dérivation numérique consiste en l'évaluation numérique des dérivées de signaux bruités. Ce problème a attiré beaucoup d'attention avec de points de vue différents : conception d'observateurs dans la littérature de contrôle (voir [6, 24, 28]), synthèse de filtres numériques en traitement du signal (voir [35]) etc... pour les applications temps réel en ligne. Ce problème est mal posé : une petite erreur dans les mesures peut induire une grande erreur dans les approximations des dérivées. Donc, des méthodes numériques diverses ont été développées pour obtenir des algorithmes stables plus ou moins sensibles au bruit additif. Ils se classent principalement en cinq catégories : les méthodes de différences finies [26], les méthodes de mollification [23, 33], les méthodes de régularisation [34], les méthodes par intégration [27], c'est-à-dire basées sur la dérivée généralisée de Lanczos qui approxime une dérivée par une intégrale. *Toute ces techniques d'estimation de dérivées, souffrent d'une sensibilité au bruit de mesure plus ou moins importante.*

Ainsi, les principaux problèmes pour l'estimation de paramètres ou de dérivées sont l'impact non négligeable du bruit sur les estimations ainsi que la difficulté d'obtenir des algorithmes utiles en temps réel c'est-à-dire dont la convergence vers les grandeurs à reconstruire est suffisamment précise, robuste vis-à-vis du bruit et rapide pour être efficace en boucle fermée.

Aussi, nous introduirons³, par le biais d'exemples, de nouvelles techniques d'estimation de paramètres et de dérivation numérique à partir de mesures bruitées⁴. Ces techniques ont été introduites dans un cadre algébrique en 2003 par Michel Fliess et Hebertt Sira-Ramirez [10]. Depuis, elles ont été développées, affinées et analysées dans de nombreuses situations : le traitement du signal [15, 16, 22] et des images [14], la compression de données [12], la commande sans modèle [20, 21], l'estimation de paramètres [10, 11, 18, 19, 31], la dérivation numérique [29, 32], l'observation (reconstruction de variables d'état [13, 36]) et ce, aussi bien pour des systèmes linéaires que non linéaires, ou bien encore à retards [1] ou encore à commutations [2, 36]. Contrairement aux autres approches traditionnelles, conduisant à des convergences asymptotiques et basées sur l'optimisation et l'exploitation de modèles statistiques des bruits, nos approches font fit de toute hypothèse statistique et conduisent à des convergences en temps fini (extrêmement importante pour des applications temps réels).

Nous illustrerons nos méthodes par des applications dans le domaine de la robotique comme par exemple, la localisation de robot mobile avec un seul amer.

2. Une perturbation structurée est une grandeur non maitrisable solution d'une équation différentielle ne faisant intervenir que cette variable.

3. Il s'agit là de contributions collectives menées sous l'impulsion et la forte implication de Michel Fliess. Les idées originales, sources de tous les développements, sont dues à M. Fliess et H. Sira-Ramirez voir [10].

4. On reprend ici le point de vue de [16, 17], indépendant de toute modélisation probabiliste. Un bruit est, alors, une *oscillation rapide* (voir [16] pour plus de détails).

Une version plus complète de ce résumé est disponible à l'adresse suivante :

Références

- [1] Belkoura L., Richard J.-P. et Fliess M., Parameters estimation of systems with delayed and structured entries, *Automatica*, vol. 45(5), p. 1117–1125, 2009.
- [2] Belkoura L., Floquet T., Ibn Taarit K., Perruquetti W. et Orlov Y., Estimation problems for a class of impulsive systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2010.
- [3] Bittanti S. et Savaresi S., On the parameterization and design of an extended Kalman filter frequency tracker, *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 45, p. 1718–1724, 2000.
- [4] Cheng M.H. et Tsai J.L., A new IIR adaptive notch filter, *Signal Process*, Vol. 86, p. 1648–1655, 2006.
- [5] Chen C.K. et Lee J.H., Design of high-order digital differentiators using L_1 error criteria. *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, Vol. 42(4), p. 287–291, 1995.
- [6] Chitour Y., Time-varying high-gain observers for numerical differentiation. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 47, p. 1565–1569, 2002.
- [7] Cullum J., Numerical differentiation and regularization, *SIAM J. NUMER. ANAL.*, Vol. 8(2), June 1971
- [8] Diop S. et Fliess M., Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories, *In Proc. 36th IEEE Conf. Decision Control*, Brighton, England, 1991.
- [9] Diop S. et Fliess M., On nonlinear observability, *In Proceedings of the First European Control Conference*, Grenoble, 1991.
- [10] Fliess M. et Sira-Ramírez H. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM Control Optim. Calc. Variat.*, Vol. 9, p. 151–168, 2003.
- [11] Fliess M., Mboup M., Mounier H. et Sira-Ramírez H., Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples, in H. Sira-Ramírez, G. Silva-Navarro (Eds.) : *Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimation*, Editorial Lagares, México, p. 1–21, 2003.
- [12] Fliess M., Join C., Mboup M. et Sira-Ramírez H., Compression différentielle de transitoires bruités, *C.R. Acad. Sci. Paris*, ser. I, Vol. 339, p. 821–826, 2004.
- [13] Fliess M. et Sira-Ramírez H., Reconstructeurs d'état, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I, Vol. 338, pp. 91–96, 2004.
- [14] Fliess M., Join C., Mboup M. et Sedoglavic A., Estimation des dérivées d'un signal multidimensionnel avec applications aux images et aux vidéos, *In Proc. GRETSI*, p. 136–139, 2005.
- [15] Fliess M., Join C., Mboup M. et Sira-Ramirez H., Analyse et représentation de signaux transitoires : application à la compression, au débruitage et à la détection de ruptures *In Proc. GRETSI*, 2005.
- [16] Fliess, M., Analyse non standard du bruit, *C.R. Acad. Sci. Paris*, ser. I, Vol. 342, p. 797–802, 2006.
- [17] Fliess M. Critique du rapport signal à bruit en communications numériques, *ARIMA*, Vol. 9, p. 419–429, 2008.

- [18] Fliess M. et Sira-Ramírez H. Closed-loop parametric identification for continuous-time linear systems via new algebraic techniques, in H. Garnier & L. Wang (Eds) : *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data*, Springer, p. 362–391, 2008, (en ligne : <http://hal.inria.fr/inria-00114958/en/>).
- [19] Fliess M., Join C. and Sira-Ramírez H., Non-linear estimation is easy. *Int. J. Modelling Identification and Control*, Vol. 4(1), p. 12–27, 2008.
- [20] Fliess M. et Join C., Commande sans modèle et commande à modèle restreint, *e-STA*, Vol. 5, 2008, en ligne <http://hal.inria.fr/inria-00288107/en/>.
- [21] Fliess M. et Join C., Intelligent PID controllers, in *Proc. 16th Mediterrean Conference on Control and Automation*, France, Ajaccio, jun 2008, en ligne <http://hal.inria.fr/inria-00273279/en/>.
- [22] Fliess M., Join C. et Mboup M., Algebraic change-point detection, *Applicable Algebra Engin. Communic. Comput.*, Vol. 21, p. 131–143, 2010.
- [23] Hào D.N., Schneider A. et Reinhardt H.J., Regularization of a non-characteristic Cauchy problem for a parabolic equation, *Inverse Problems*, Vol. 11, p. 1247–1264, 1995.
- [24] Ibrir S., Linear time-derivatives trackers, *Automatica*, Vol. 40, p. 397–405, 2004.
- [25] Kahn M., Mackisack M., Osborne M., et Smyth G. K., On the consistency of Prony’s method and related algorithms, *J. Comput. Graph. Statist.*, Vol. 1, p. 329–349, 1992.
- [26] Khan I.R., Ohba R., New finite difference formulas for numerical differentiation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 126, p. 269–276, 2000.
- [27] Lanczos C., *Applied Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1956.
- [28] Levant A., Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, Vol. 76, p. 924–941, 2003.
- [29] Liu D.Y., Gibaru O. et Perruquetti W., Error analysis of a class of derivative estimators for noisy signals, *Numerical Algo.*, 2011.
- [30] Ljung L., *System Identification - Theory For the User*, 2nd ed, PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1999.
- [31] Mboup M., Parameter estimation for signals described by differential equations, *Applicable Analysis*, Vol. 88, p. 29–52, 2009.
- [32] M. Mboup, C. Join et M. Fliess, Numerical differentiation with annihilators in noisy environment, *Numerical Algo.*, Vol. 50 (4), p. 439–467, 2009.
- [33] Murio D.A., C.E. Mejía et S. Zhan, Discrete mollification and automatic numerical differentiation, *Comput. Math. Appl.*, Vol. 35, p. 1–16, 1998.
- [34] Nakamura G., Wang S. et Wang Y., Numerical differentiation for the second order derivatives of functions of two variables, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 212, p. 341–358, 2008.
- [35] Rader C.M. et Jackson L.B., Approximating noncausal IIR digital filters having arbitrary poles, including new Hilbert transformer designs, via forward/backward block recursion, *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, Vol. 53(12), p. 2779–2787, 2006.
- [36] Tian. Y., Une contribution à l’observation et à l’estimation des systèmes linéaires, *Mémoire de Thèse de Ecole centrale de Lille*, 8 Dec 2010.