

Différenciation numérique multivariable

Samer RIACHY

En collaboration avec: Mamadou MBOUP et Jean-Pierre RICHARD



UNIVERSITÉ
DE REIMS
CHAMPAGNE-ARDENNE



Plan

- 1 Estimation des dérivées
- 2 Estimation des dérivées : échantillonnage irrégulier
- 3 Application : Estimation du mouvement en images

Plan

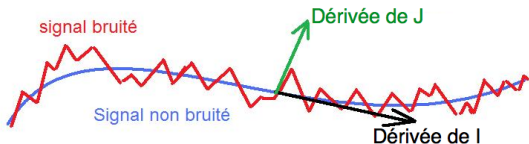
- 1 Estimation des dérivées
- 2 Estimation des dérivées : échantillonnage irrégulier
- 3 Application : Estimation du mouvement en images

Introduction

- On dispose d'un signal bruité (image, vidéo...)

$$J(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}) + \varpi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r).$$

- But : calculer une estimation de $\frac{\partial^n}{\partial \mathbf{x}^n} I(\mathbf{x})$



Exemple : Estimation de I_{x_1}

- Soit $I(\mathbf{x}) = I(x_1, x_2)$ le signal non bruité et $\mathbb{I}_N(x_1, x_2)$ un dev. de Taylor d'ordre $N = (1, 1)$ autour de $(0, 0)$

$$\mathbb{I}_N(x_1, x_2) = I_0(\bar{0}) + I_{x_1}(\bar{0})x_1 + I_{x_2}(\bar{0})x_2,$$

$$(\bar{0}) := (0, 0), I_0(\bar{0}) := I(0, 0), I_{x_1}(\bar{0}) := \frac{\partial I}{\partial x_1}(0, 0), I_{x_2}(\bar{0}) := \frac{\partial I}{\partial x_2}(0, 0).$$

Exemple : Estimation de I_{x_1}

- Soit $I(\mathbf{x}) = I(x_1, x_2)$ le signal non bruité et $\mathbb{I}_N(x_1, x_2)$ un dev. de Taylor d'ordre $N = (1, 1)$ autour de $(0, 0)$

$$\mathbb{I}_N(x_1, x_2) = I_0(\bar{0}) + I_{x_1}(\bar{0})x_1 + I_{x_2}(\bar{0})x_2,$$

$$(\bar{0}) := (0, 0), I_0(\bar{0}) := I(0, 0), I_{x_1}(\bar{0}) := \frac{\partial I}{\partial x_1}(0, 0), I_{x_2}(\bar{0}) := \frac{\partial I}{\partial x_2}(0, 0).$$

- Transformée de Laplace bidimensionnelle :

$$\hat{\mathbb{I}}_N(s_1, s_2) = \frac{I_0(\bar{0})}{s_1 s_2} + \frac{I_{x_1}(\bar{0})}{s_1^2 s_2} + \frac{I_{x_2}(\bar{0})}{s_1 s_2^2}$$

Exemple : Estimation de I_{x_1}

- Soit $I(\mathbf{x}) = I(x_1, x_2)$ le signal non bruité et $\mathbb{I}_N(x_1, x_2)$ un dev. de Taylor d'ordre $N = (1, 1)$ autour de $(0, 0)$

$$\mathbb{I}_N(x_1, x_2) = I_0(\bar{0}) + I_{x_1}(\bar{0})x_1 + I_{x_2}(\bar{0})x_2,$$

$$(\bar{0}) := (0, 0), I_0(\bar{0}) := I(0, 0), I_{x_1}(\bar{0}) := \frac{\partial I}{\partial x_1}(0, 0), I_{x_2}(\bar{0}) := \frac{\partial I}{\partial x_2}(0, 0).$$

- Transformée de Laplace bidimensionnelle :

$$\hat{\mathbb{I}}_N(s_1, s_2) = \frac{I_0(\bar{0})}{s_1 s_2} + \frac{I_{x_1}(\bar{0})}{s_1^2 s_2} + \frac{I_{x_2}(\bar{0})}{s_1 s_2^2}$$

- Multiplions par $s_1 s_2$

$$s_1 s_2 \hat{\mathbb{I}}_N(s_1, s_2) = I_0(\bar{0}) + \frac{I_{x_1}(\bar{0})}{s_1} + \frac{I_{x_2}(\bar{0})}{s_2}$$

Exemple : Estimation de I_{x_1}

- Soit $I(\mathbf{x}) = I(x_1, x_2)$ le signal non bruité et $\mathbb{I}_N(x_1, x_2)$ un dev. de Taylor d'ordre $N = (1, 1)$ autour de $(0, 0)$

$$\mathbb{I}_N(x_1, x_2) = I_0(\bar{0}) + I_{x_1}(\bar{0})x_1 + I_{x_2}(\bar{0})x_2,$$

$$(\bar{0}) := (0, 0), I_0(\bar{0}) := I(0, 0), I_{x_1}(\bar{0}) := \frac{\partial I}{\partial x_1}(0, 0), I_{x_2}(\bar{0}) := \frac{\partial I}{\partial x_2}(0, 0).$$

- Transformée de Laplace bidimensionnelle :

$$\hat{\mathbb{I}}_N(s_1, s_2) = \frac{I_0(\bar{0})}{s_1 s_2} + \frac{I_{x_1}(\bar{0})}{s_1^2 s_2} + \frac{I_{x_2}(\bar{0})}{s_1 s_2^2}$$

- Multiplions par $s_1 s_2$

$$s_1 s_2 \hat{\mathbb{I}}_N(s_1, s_2) = I_0(\bar{0}) + \frac{I_{x_1}(\bar{0})}{s_1} + \frac{I_{x_2}(\bar{0})}{s_2}$$

- dérivons par rapport à s_1 :

$$s_2 \hat{\mathbb{I}}_N(s_1, s_2) + s_1 s_2 \frac{\partial \hat{\mathbb{I}}_N(s_1, s_2)}{\partial s_1} = -\frac{I_{x_1}(\bar{0})}{s_1^2}.$$

Exemple (suite) : Estimation de I_{x_1}

- divisons par $s_1^2 s_2^2$

$$\frac{1}{s_1^2 s_2} \hat{\mathbb{I}}_N(s_1, s_2) + \frac{1}{s_1 s_2} \frac{\partial \hat{\mathbb{I}}_N(s_1, s_2)}{\partial s_1} = -\frac{I_{x_1}(\bar{0})}{s_1^4 s_2^2}$$

Exemple (suite) : Estimation de I_{x_1}

- divisons par $s_1^2 s_2^2$

$$\frac{1}{s_1^2 s_2} \hat{\mathbb{I}}_N(s_1, s_2) + \frac{1}{s_1 s_2} \frac{\partial \hat{\mathbb{I}}_N(s_1, s_2)}{\partial s_1} = -\frac{I_{x_1}(\bar{0})}{s_1^4 s_2^2}$$

- utilisons : $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{\mathbf{s}^\alpha} \frac{\partial^\beta \hat{\gamma}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}^\beta} \right) = \frac{1}{(\alpha - \bar{1})!} \int_0^X (\mathbf{X} - \mathbf{x})^{\alpha - \bar{1}} (-\mathbf{x})^\beta I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

Exemple (suite) : Estimation de I_{x_1}

- divisons par $s_1^2 s_2^2$

$$\frac{1}{s_1^2 s_2} \hat{\mathbb{I}}_N(s_1, s_2) + \frac{1}{s_1 s_2} \frac{\partial \hat{\mathbb{I}}_N(s_1, s_2)}{\partial s_1} = -\frac{I_{x_1}(\bar{0})}{s_1^4 s_2^2}$$

- utilisons : $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{\mathbf{s}^\alpha} \frac{\partial^\beta \hat{\gamma}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}^\beta} \right) = \frac{1}{(\alpha - \bar{1})!} \int_0^X (\mathbf{X} - \mathbf{x})^{\alpha - \bar{1}} (-\mathbf{x})^\beta I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$
- on trouve :

$$\int_0^{X_1} \int_0^{X_2} (X_1 - 2x_1) \mathbb{I}_N(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = -I_{x_1}(\bar{0}) \frac{X_1^3}{3!} X_2$$

Exemple (suite) : Estimation de I_{x_1}

- divisons par $s_1^2 s_2^2$

$$\frac{1}{s_1^2 s_2^2} \hat{\mathbb{I}}_N(s_1, s_2) + \frac{1}{s_1 s_2} \frac{\partial \hat{\mathbb{I}}_N(s_1, s_2)}{\partial s_1} = -\frac{I_{x_1}(\bar{0})}{s_1^4 s_2^2}$$

- utilisons : $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{\mathbf{s}^\alpha} \frac{\partial^\beta \hat{\gamma}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}^\beta} \right) = \frac{1}{(\alpha - \bar{1})!} \int_0^X (\mathbf{X} - \mathbf{x})^{\alpha - \bar{1}} (-\mathbf{x})^\beta I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$
- on trouve :

$$\int_0^{X_1} \int_0^{X_2} (X_1 - 2x_1) \mathbb{I}_N(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = -I_{x_1}(\bar{0}) \frac{X_1^3}{3!} X_2$$

- un estimateur** en $(0, 0)$ est donné par :

$$\tilde{I}_{x_1}(\bar{0}) = -\frac{3!}{X_1^3 X_2} \int_0^{X_1} \int_0^{X_2} (X_1 - 2x_1) J(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Exemple (suite) : Estimation de I_{x_1}

- divisons par $s_1^2 s_2^2$

$$\frac{1}{s_1^2 s_2} \hat{\mathbb{I}}_N(s_1, s_2) + \frac{1}{s_1 s_2} \frac{\partial \hat{\mathbb{I}}_N(s_1, s_2)}{\partial s_1} = -\frac{I_{x_1}(\bar{0})}{s_1^4 s_2^2}$$

- utilisons : $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{\mathbf{s}^\alpha} \frac{\partial^\beta \hat{\gamma}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}^\beta} \right) = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_{\bar{0}}^{\mathbf{X}} (\mathbf{X} - \mathbf{x})^{\alpha-1} (-\mathbf{x})^\beta I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$
- on trouve :

$$\int_0^{X_1} \int_0^{X_2} (X_1 - 2x_1) \mathbb{I}_N(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = -I_{x_1}(\bar{0}) \frac{X_1^3}{3!} X_2$$

- un estimateur** en $(0, 0)$ est donné par :

$$\tilde{I}_{x_1}(\bar{0}) = -\frac{3!}{X_1^3 X_2} \int_0^{X_1} \int_0^{X_2} (X_1 - 2x_1) J(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

- normalisation de l'intégrale

$$\tilde{I}_{x_1}(\bar{0}) = \frac{-6}{X_1} \int_0^1 \int_0^1 (1 - 2x_1) J(X_1 x_1, X_2 x_2) dx_1 dx_2$$

Exemple (suite) : Estimation de I_{X_1}

- normalisation de l'intégrale

$$\tilde{I}_{X_1}(\bar{0}) = \frac{-6}{X_1} \int_0^1 \int_0^1 (1 - 2x_1) J(X_1 x_1, X_2 x_2) dx_1 dx_2$$

- Estimation à $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$

$$\tilde{I}_{X_1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{-6}{X_1} \int_0^1 \int_0^1 (1 - 2x_1) J(\mathbf{r}_1 + X_1 x_1, \mathbf{r}_2 + X_2 x_2) dx_1 dx_2$$

Exemple (suite) : Estimation de I_{x_1}

- normalisation de l'intégrale

$$\tilde{I}_{x_1}(\bar{0}) = \frac{-6}{X_1} \int_0^1 \int_0^1 (1 - 2x_1) J(X_1 x_1, X_2 x_2) dx_1 dx_2$$

- Estimation à $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$

$$\tilde{I}_{x_1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{-6}{X_1} \int_0^1 \int_0^1 (1 - 2x_1) J(\mathbf{r}_1 + X_1 x_1, \mathbf{r}_2 + X_2 x_2) dx_1 dx_2$$

Remarque (Généralisations)

- Dimension plus grande 3, 4...
- Dev. de Taylor d'ordre plus élevé
- On peut considérer d'autres manipulations dans le domaine de Laplace
($\times s_1 s_2, \frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{1}{s_2} \dots$)

Remarque sur la dimension du signal

- **Question** : Le calcul des estimateurs devient-il plus compliqué avec l'augmentation de la dimension du signal ?

Remarque sur la dimension du signal

- **Question** : Le calcul des estimateurs devient-il plus compliqué avec l'augmentation de la dimension du signal ??
- **Réponse** : Non. Si on dispose des estimateurs monodimensionnels, l'estimateur multidimensionnel se construit par concaténation.

Remarque sur la dimension du signal

- **Question** : Le calcul des estimateurs devient-il plus compliqué avec l'augmentation de la dimension du signal ??
- **Réponse** : Non. Si on dispose des estimateurs monodimensionnels, l'estimateur multidimensionnel se construit par concaténation.
- **Exemple** : Estimateur pour I_{x_1} ($r = 3 =$ dimension du signal)
 - Estimateurs monodimensionnels :

$$y(0) = 2 \int_0^1 (2 - 3\tau)y(T\tau)d\tau, \quad \dot{y}(0) = \frac{-12}{T} \int_0^1 (3 - 16\tau + 15\tau^2)y(T\tau)d\tau$$

- Estimateur multidimensionnel

$$\tilde{I}_{x_1}(0,0,0) = \frac{-12}{X} 2 \times 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (3 - 16x_1 + 15x_1^2)(2 - 3x_2)(2 - 3x_3) \\ J(X_1 X_1, X_2 X_2, X_3 X_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

Généralisation : Notation multi-indices

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ un r -uplet d'entiers non négatifs α_m . α est un multi-indice. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$ représente la variable de Laplace.

① $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_r \pm \beta_r)$.

Généralisation : Notation multi-indices

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ un r -uplet d'entiers non négatifs α_m . α est un multi-indice. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$ représente la variable de Laplace.

- 1 $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_r \pm \beta_r)$.
- 2 Ordre partiel $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_m \leq \beta_m, \forall m \in \{1, \dots, r\}$.

Généralisation : Notation multi-indices

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ un r -uplet d'entiers non négatifs α_m . α est un multi-indice. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$ représente la variable de Laplace.

- 1 $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_r \pm \beta_r)$.
- 2 Ordre partiel $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_m \leq \beta_m, \forall m \in \{1, \dots, r\}$.
- 3 Avec $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, on a $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r}$.

Généralisation : Notation multi-indices

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ un r -uplet d'entiers non négatifs α_m . α est un multi-indice. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$ représente la variable de Laplace.

- 1 $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_r \pm \beta_r)$.
- 2 Ordre partiel $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_m \leq \beta_m, \forall m \in \{1, \dots, r\}$.
- 3 Avec $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, on a $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r}$.
- 4 Le degré de \mathbf{x}^α est : $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$.

Généralisation : Notation multi-indices

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ un r -uplet d'entiers non négatifs α_m . α est un multi-indice. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$ représente la variable de Laplace.

- 1 $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_r \pm \beta_r)$.
- 2 Ordre partiel $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_m \leq \beta_m, \forall m \in \{1, \dots, r\}$.
- 3 Avec $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, on a $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r}$.
- 4 Le degré de \mathbf{x}^α est : $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$.
- 5 Factorielle : $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_r!$

Généralisation : Notation multi-indices

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ un r -uplet d'entiers non négatifs α_m . α est un multi-indice. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$ représente la variable de Laplace.

- 1 $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_r \pm \beta_r)$.
- 2 Ordre partiel $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_m \leq \beta_m, \forall m \in \{1, \dots, r\}$.
- 3 Avec $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, on a $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r}$.
- 4 Le degré de \mathbf{x}^α est : $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$.
- 5 Factorielle : $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_r!$
- 6 Coefficient binomial : $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_r}{\beta_r}$.

Généralisation : Notation multi-indices

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ un r -uplet d'entiers non négatifs α_m . α est un multi-indice. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$ représente la variable de Laplace.

- 1 $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_r \pm \beta_r)$.
- 2 Ordre partiel $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_m \leq \beta_m, \forall m \in \{1, \dots, r\}$.
- 3 Avec $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, on a $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r}$.
- 4 Le degré de \mathbf{x}^α est : $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$.
- 5 Factorielle : $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_r!$
- 6 Coefficient binomial : $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_r}{\beta_r}$.
- 7 $\bar{b} = (b, \dots, b)$, $b \in \mathbb{N}$, $\bar{b} \in \mathbb{N}^r$.

Généralisation : Notation multi-indices

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ un r -uplet d'entiers non négatifs α_m . α est un multi-indice. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$ représente la variable de Laplace.

- 1 $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_r \pm \beta_r)$.
- 2 Ordre partiel $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_m \leq \beta_m, \forall m \in \{1, \dots, r\}$.
- 3 Avec $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, on a $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r}$.
- 4 Le degré de \mathbf{x}^α est : $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$.
- 5 Factorielle : $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_r!$
- 6 Coefficient binomial : $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_r}{\beta_r}$.
- 7 $\bar{b} = (b, \dots, b)$, $b \in \mathbb{N}$, $\bar{b} \in \mathbb{N}^r$.
- 8 Pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$ et $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_r) \in \mathbb{R}^r$,

$$\int_0^{\mathbf{X}} \mathbf{x}^\alpha f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \underbrace{\int_0^{X_1} \dots \int_0^{X_r}}_r f(x_1, \dots, x_r) dx_1 \dots dx_r.$$

Généralisation : Notation multi-indices

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ un r -uplet d'entiers non négatifs α_m . α est un multi-indice. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$ représente la variable de Laplace.

- 1 $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_r \pm \beta_r)$.
- 2 Ordre partiel $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_m \leq \beta_m, \forall m \in \{1, \dots, r\}$.
- 3 Avec $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, on a $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r}$.
- 4 Le degré de \mathbf{x}^α est : $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$.
- 5 Factorielle : $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_r!$
- 6 Coefficient binomial : $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_r}{\beta_r}$.
- 7 $\bar{b} = (b, \dots, b)$, $b \in \mathbb{N}$, $\bar{b} \in \mathbb{N}^r$.
- 8 Pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$ et $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_r) \in \mathbb{R}^r$,

$$\int_{\bar{0}}^{\mathbf{X}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \underbrace{\int_0^{X_1} \dots \int_0^{X_r}}_r f(x_1, \dots, x_r) dx_1 \dots dx_r.$$
- 9 Dérivées partielles : $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_r^{\alpha_r}$ où $\partial_m^{\alpha_m} := \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}}$.

Généralisation : Notation multi-indices

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ un r -uplet d'entiers non négatifs α_m . α est un multi-indice. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$ représente la variable de Laplace.

- 1 $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_r \pm \beta_r)$.
- 2 Ordre partiel $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_m \leq \beta_m, \forall m \in \{1, \dots, r\}$.
- 3 Avec $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, on a $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r}$.
- 4 Le degré de \mathbf{x}^α est : $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$.
- 5 Factorielle : $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_r!$
- 6 Coefficient binomial : $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_r}{\beta_r}$.
- 7 $\bar{b} = (b, \dots, b)$, $b \in \mathbb{N}$, $\bar{b} \in \mathbb{N}^r$.
- 8 Pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$ et $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_r) \in \mathbb{R}^r$,

$$\int_{\bar{0}}^{\mathbf{X}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \underbrace{\int_0^{X_1} \dots \int_0^{X_r}}_r f(x_1, \dots, x_r) dx_1 \dots dx_r.$$
- 9 Dérivées partielles : $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_r^{\alpha_r}$ où $\partial_m^{\alpha_m} := \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}}$.
- 10 $\mathbf{1}_m = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.
- 11 $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (u_1 v_1, \dots, u_1 v_r, u_2 v_1, \dots, u_2 v_r, \dots, u_r v_1, \dots, u_r v_r)$.

Généralisation du calcul

- Développement de Taylor : $\mathbb{I}_N(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N I_{\mathbf{x}^\alpha}(\bar{0}) \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!}$

Généralisation du calcul

- Développement de Taylor : $\mathbb{I}_N(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N l_{\mathbf{x}\alpha}(\bar{0}) \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!}$
- Transformée de Laplace : $\hat{\mathbb{I}}_N(\mathbf{s}) = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N \frac{l_{\mathbf{x}\alpha}(\bar{0})}{\mathbf{s}^{\alpha+\bar{1}}}$

Généralisation du calcul

- Développement de Taylor : $\mathbb{I}_N(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N l_{\mathbf{x}\alpha}(\bar{0}) \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!}$
- Transformée de Laplace : $\hat{\mathbb{I}}_N(\mathbf{s}) = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N \frac{l_{\mathbf{x}\alpha}(\bar{0})}{\mathbf{s}^{\alpha+\bar{1}}}$
- Appliquons l'opérateur : $\Pi_{\kappa,\mu}^{N,n} = \frac{1}{\mathbf{s}^{N+\mu+\bar{1}}} \partial^{n+\kappa} \frac{1}{\mathbf{s}} \partial^{N-n} \mathbf{s}^{N+\bar{1}}$

Généralisation du calcul

- Développement de Taylor : $\mathbb{I}_N(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N l_{\mathbf{x}\alpha}(\bar{0}) \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!}$
- Transformée de Laplace : $\hat{\mathbb{I}}_N(\mathbf{s}) = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N \frac{l_{\mathbf{x}\alpha}(\bar{0})}{\mathbf{s}^{\alpha+\bar{1}}}$
- Appliquons l'opérateur : $\Pi_{\kappa,\mu}^{N,n} = \frac{1}{\mathbf{s}^{N+\mu+\bar{1}}} \partial^{n+\kappa} \frac{1}{\mathbf{s}} \partial^{N-n} \mathbf{s}^{N+\bar{1}}$
- On isole ainsi $l_{\mathbf{x}^n}(\bar{0})$:

$$\Pi_{\kappa,\mu}^{N,n} \hat{\mathbb{I}}_N(\mathbf{s}) = \frac{(-1)^{(n+\kappa)} (n+\kappa)! (N-n)!}{\mathbf{s}^{\mu+\kappa+N+n+\bar{2}}} l_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; N)$$

Généralisation du calcul

- Développement de Taylor : $\mathbb{I}_N(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N l_{\mathbf{x}^\alpha}(\bar{0}) \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!}$
- Transformée de Laplace : $\hat{\mathbb{I}}_N(\mathbf{s}) = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N \frac{l_{\mathbf{x}^\alpha}(\bar{0})}{\mathbf{s}^{\alpha+\bar{1}}}$
- Appliquons l'opérateur : $\Pi_{\kappa,\mu}^{N,n} = \frac{1}{\mathbf{s}^{N+\mu+\bar{1}}} \partial^{n+\kappa} \frac{1}{\mathbf{s}} \partial^{N-n} \mathbf{s}^{N+\bar{1}}$
- On isole ainsi $l_{\mathbf{x}^n}(\bar{0})$:

$$\Pi_{\kappa,\mu}^{N,n} \hat{\mathbb{I}}_N(\mathbf{s}) = \frac{(-1)^{(n+\kappa)} (n+\kappa)! (N-n)!}{\mathbf{s}^{\mu+\kappa+N+n+\bar{2}}} l_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; N)$$

- **Building block :**

$$\tilde{l}_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; n) = \frac{(\mu + \kappa + 2n + 1)!}{(\mu + n)! (\kappa + n)!} \int_{\bar{0}}^{\bar{1}} (\bar{1} - \mathbf{x})^{\mu+n} \mathbf{x}^{\kappa+n} \partial^n J(\mathbf{X}\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Généralisation du calcul

- Développement de Taylor : $\mathbb{I}_N(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N l_{\mathbf{x}^\alpha}(\bar{0}) \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!}$
- Transformée de Laplace : $\hat{\mathbb{I}}_N(\mathbf{s}) = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N \frac{l_{\mathbf{x}^\alpha}(\bar{0})}{\mathbf{s}^{\alpha+\bar{1}}}$
- Appliquons l'opérateur : $\Pi_{\kappa,\mu}^{N,n} = \frac{1}{\mathbf{s}^{N+\mu+\bar{1}}} \partial^{n+\kappa} \frac{1}{\mathbf{s}} \partial^{N-n} \mathbf{s}^{N+\bar{1}}$
- On isole ainsi $l_{\mathbf{x}^n}(\bar{0})$:

$$\Pi_{\kappa,\mu}^{N,n} \hat{\mathbb{I}}_N(\mathbf{s}) = \frac{(-1)^{(n+\kappa)} (n+\kappa)! (N-n)!}{\mathbf{s}^{\mu+\kappa+N+n+\bar{2}}} l_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; N)$$

- **Building block :**

$$\tilde{l}_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; n) = \frac{(\mu + \kappa + 2n + 1)!}{(\mu + n)! (\kappa + n)!} \int_{\bar{0}}^{\bar{1}} (\bar{1} - \mathbf{x})^{\mu+n} \mathbf{x}^{\kappa+n} \partial^n J(\mathbf{X}\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

- Soit $\mathcal{S} = \{\tilde{l}_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; n); \kappa + \mu = q, q \in \mathbb{N}^r\}$

Quelques propriétés

A partir de $S = \{\tilde{l}_{x^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; n); \kappa + \mu = q, q \in \mathbb{N}^r\}$ on a :

$$\tilde{l}_{x^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; N) = \sum_{l=\bar{0}}^q \lambda_l \tilde{l}_{x^n}(\bar{0}; \kappa_l, \mu_l; n), \quad \lambda_l \in \mathbb{Q}$$

Estimateur non minimal = combinaison affine d'estimateurs minimaux

Quelques propriétés

A partir de $S = \{\tilde{l}_{x^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; n); \kappa + \mu = q, q \in \mathbb{N}^r\}$ on a :

$$\tilde{l}_{x^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; N) = \sum_{l=\bar{0}}^q \lambda_l \tilde{l}_{x^n}(\bar{0}; \kappa_l, \mu_l; n), \quad \lambda_l \in \mathbb{Q}$$

Estimateur non minimal = combinaison affine d'estimateurs minimaux

$$\tilde{l}_{x^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; N) = \alpha_m \tilde{l}_{x^n}(\bar{0}; \kappa, \mu + 1_m; N - 1_m) + \mathfrak{b}_m \tilde{l}_{x^n}(\bar{0}; \kappa + 1_m, \mu; N - 1_m)$$

$$\alpha_m = \frac{N_m + \kappa_m + 1}{N_m - n_m}, \quad \mathfrak{b}_m = 1 - \alpha_m \text{ et } N_m > n_m. \text{ Estimateur non minimal d'ordre } N$$

= combinaison affine d'estimateurs d'ordre $N - 1$

Interprétation par les moindres carrés

- Introduisons $\mathcal{H}_q(\xi, \mathbf{x}) = \sum_{l=0}^q \frac{\mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\xi) \mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x})}{\|\mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x})\|^2}$

Interprétation par les moindres carrés

- Introduisons $\mathcal{K}_q(\xi, \mathbf{x}) = \sum_{l=0}^q \frac{\mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\xi) \mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x})}{\|\mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x})\|^2}$
- Approximation d'une fonction F au sens des moindres carrés

$$F_{\text{LS}, q}(\mathbf{X}\xi) \doteq \sum_{l=0}^q \frac{\langle \mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x}), F(\mathbf{X}\mathbf{x}) \rangle}{\|\mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}\|^2} \mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\xi)$$

Interprétation par les moindres carrés

- Introduisons $\mathcal{K}_q(\xi, \mathbf{x}) = \sum_{l=\bar{0}}^q \frac{\mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\xi) \mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x})}{\|\mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x})\|^2}$
- Approximation d'une fonction F au sens des moindres carrés

$$F_{LS,q}(\mathbf{X}\xi) \doteq \sum_{l=\bar{0}}^q \frac{\langle \mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x}), F(\mathbf{X}\mathbf{x}) \rangle}{\|\mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}\|^2} \mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\xi)$$
- On a les conclusions suivantes :

$$\tilde{l}_{x^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; n) = (\partial^n l)_{LS,1}(\mathbf{X}\xi'), \quad \xi'_m = \frac{\kappa_m + n_m + 1}{\mu_m + \kappa_m + 2(n_m + 1)}$$

l'estimateur minimal induit un "retard" d'estimation

Interprétation par les moindres carrés

- Introduisons $\mathcal{K}_q(\xi, \mathbf{x}) = \sum_{l=0}^q \frac{\mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\xi) \mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x})}{\|\mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x})\|^2}$
- Approximation d'une fonction F au sens des moindres carrés

$$F_{LS,q}(\mathbf{X}\xi) \doteq \sum_{l=0}^q \frac{\langle \mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x}), F(\mathbf{X}\mathbf{x}) \rangle}{\|\mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}\|^2} \mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\xi)$$
- On a les conclusions suivantes :

$$\tilde{l}_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; n) = (\partial^n l)_{LS,1}(\mathbf{X}\xi'), \quad \xi'_m = \frac{\kappa_m + n_m + 1}{\mu_m + \kappa_m + 2(n_m + 1)}$$

l'estimateur minimal induit un "retard" d'estimation

$$\tilde{l}_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; N) = (\partial^n) l_{LS,q}(\bar{0})$$

l'estimateur non minimal n'induit pas de "retard"

Interprétation par les moindres carrés

- Introduisons $\mathcal{K}_q(\xi, \mathbf{x}) = \sum_{l=0}^q \frac{\mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\xi) \mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x})}{\|\mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x})\|^2}$
- Approximation d'une fonction F au sens des moindres carrés

$$F_{\text{LS},q}(\mathbf{X}\xi) \doteq \sum_{l=0}^q \frac{\langle \mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x}), F(\mathbf{X}\mathbf{x}) \rangle}{\|\mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}\|^2} \mathcal{P}_l^{\{\alpha, \beta\}}(\xi)$$
- On a les conclusions suivantes :

$$\sum_{l=0}^q \lambda_l(\xi) \tilde{I}_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa_l, \mu_l; n) = \langle \mathcal{K}_q(\xi, \mathbf{x}), \partial^n I(\mathbf{X}\mathbf{x}) \rangle, \quad \sum_{l=0}^q \lambda_l(\xi) = 1$$

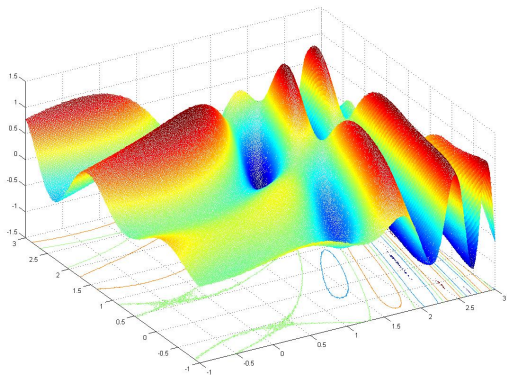
On peut toujours choisir des $\lambda_l(\xi)$ afin d'imposer un "retard" désiré.

Robustesse vis-à-vis du bruit (blanc additif)

- $S = \{\tilde{l}_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}; n); \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\mu} = \mathbf{q}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}^r\}$
- signal d'entrée : bruit blanc

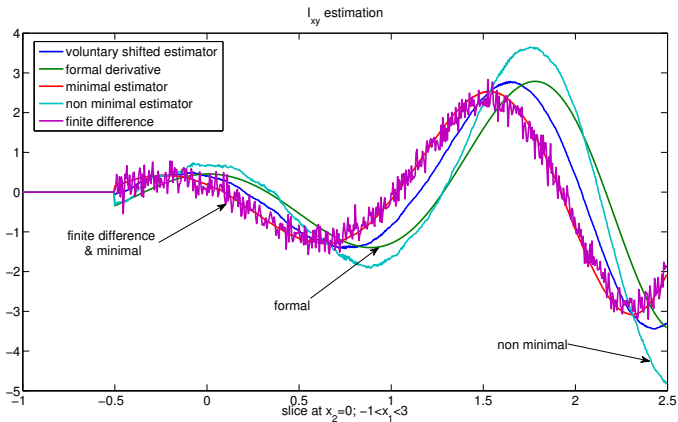
La combinaison affine des éléments de S qui minimise la variance du signal de sortie correspond au barycentre de S

Simulations



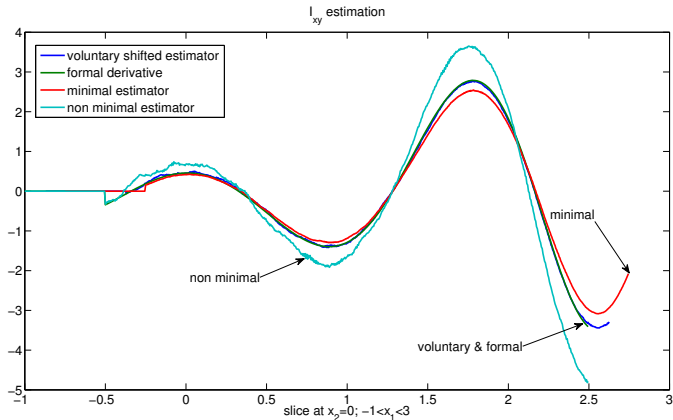
$$J(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + 3\right)\cos(2x_1 + 1 - e^{x_2}) + \varpi(x_1, x_2).$$

Simulations



Estimation de la dérivée croisée $\tilde{I}_{x_1 x_2}$

Simulations



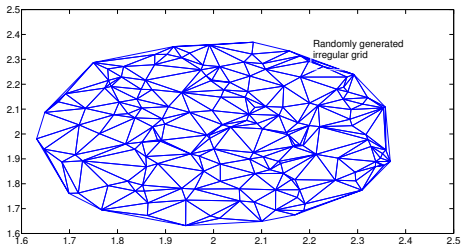
Alignement des courbes de la figure précédente

Plan

- 1 Estimation des dérivées
- 2 Estimation des dérivées : échantillonnage irrégulier
- 3 Application : Estimation du mouvement en images

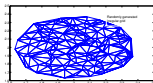
Estimation des dérivées : Échantillonnage irrégulier

- On choisit un domaine autour du point où l'on cherche à estimer une dérivée



Estimation des dérivées : Échantillonnage irrégulier

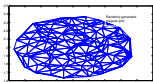
- On choisit un domaine autour du point où l'on cherche à estimer une dérivée



- Estimateur :
$$\tilde{l}_y(0,0) = \frac{\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} (f_1 + f_2 - 2y) J(x,y) dx dy}{\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} (f_1 - y)(f_2 - y) dx dy}.$$

Estimation des dérivées : Échantillonnage irrégulier

- On choisit un domaine autour du point où l'on cherche à estimer une dérivée



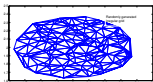
- Estimateur : $\tilde{l}_y(0,0) = \frac{\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} (f_1 + f_2 - 2y)J(x,y) dx dy}{\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} (f_1 - y)(f_2 - y) dx dy}$.

- ou aussi : $\tilde{l}_y(0,0) = \frac{\sum_{i=1}^L \int_{T_i} (f_1 + f_2 - 2y)J(x,y) dx dy}{\sum_{i=1}^L \int_{T_i} (f_1 - y)(f_2 - y) dx dy}$

Les T_i résultent d'une triangulation de Delaunay.

Estimation des dérivées : Échantillonnage irrégulier

- On choisit un domaine autour du point où l'on cherche à estimer une dérivée



- Estimateur : $\tilde{l}_y(0,0) = \frac{\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} (f_1 + f_2 - 2y)J(x,y) dx dy}{\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} (f_1 - y)(f_2 - y) dx dy}$.

- ou aussi : $\tilde{l}_y(0,0) = \frac{\sum_{i=1}^L \int_{T_i} (f_1 + f_2 - 2y)J(x,y) dx dy}{\sum_{i=1}^L \int_{T_i} (f_1 - y)(f_2 - y) dx dy}$

Les T_i résultent d'une triangulation de Delaunay.

- Sur chaque triangle la méthode des trapèzes est utilisées.

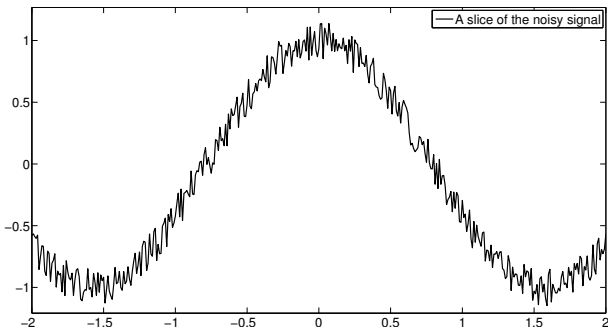
Estimation des dérivées : Échantillonnage irrégulier

Remarque (s)

Les notions principales du cas régulier s'étendent au cas irrégulier

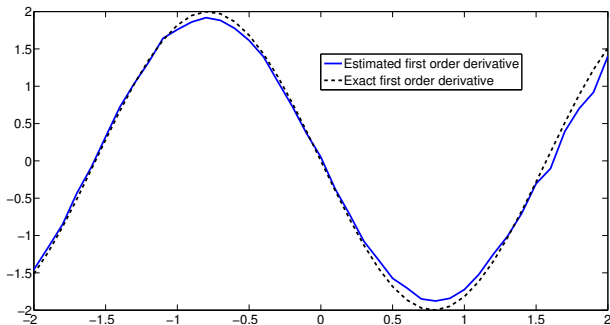
- *Les retards d'estimation*
- *L'interprétation par les moindres carrés...*

Estimation des dérivées : Échantillonnage irrégulier



(une coupe du) Signal bruité

Estimation des dérivées : Échantillonnage irrégulier



Estimation de la première dérivée.

Plan

- 1 Estimation des dérivées
- 2 Estimation des dérivées : échantillonnage irrégulier
- 3 Application : Estimation du mouvement en images

Méthode de Horn et Schunck

- Horn et Schunck : une des méthodes les plus connues pour l'estimation du mouvement.
- L'article fondateur (de 1981) est cité plus de 6700 fois d'après Google Scholar.
- **Avantage** : Simplicité
- **Inconvénients** : imprécise et sensible au bruit
- **Travail effectué** :
 - Tester nos dérivateurs avec l'algorithme de Horn et Schunck
 - Comparer avec une méthode récente de la littérature.

Méthode de H& S

- Une séquence d'images (noir et blanc) est représentée par
$$\mathcal{I}(x, y, t) : \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
- Γ est un domaine rectangulaire $\Gamma = [0, \bar{X}] \times [0, \bar{Y}] \times [0, \bar{T}]$ où \bar{X} , \bar{Y} et \bar{T} sont des constantes positives.

Méthode de H& S

- Une séquence d'images (noir et blanc) est représentée par $\mathcal{I}(x, y, t) : \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
- Γ est un domaine rectangulaire $\Gamma = [0, \bar{X}] \times [0, \bar{Y}] \times [0, \bar{T}]$ où \bar{X} , \bar{Y} et \bar{T} sont des constantes positives.
- Hypothèse : $\mathcal{I}(x, y, t) = \mathcal{I}(x, y, t) + \mathcal{N}(x, y, t)$.

Méthode de H& S

- Une séquence d'images (noir et blanc) est représentée par $\mathcal{I}(x, y, t) : \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
- Γ est un domaine rectangulaire $\Gamma = [0, \bar{X}] \times [0, \bar{Y}] \times [0, \bar{T}]$ où \bar{X} , \bar{Y} et \bar{T} sont des constantes positives.
- Hypothèse : $\mathcal{I}(x, y, t) = \mathcal{I}(x, y, t) + \mathcal{N}(x, y, t)$.
- Point de départ : $\mathcal{I}(x, y, t) \approx \mathcal{I}(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t)$

Méthode de H& S

- Une séquence d'images (noir et blanc) est représentée par $\mathcal{I}(x, y, t) : \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
- Γ est un domaine rectangulaire $\Gamma = [0, \bar{X}] \times [0, \bar{Y}] \times [0, \bar{T}]$ où \bar{X} , \bar{Y} et \bar{T} sont des constantes positives.
- Hypothèse : $\mathcal{I}(x, y, t) = \mathcal{I}(x, y, t) + \mathcal{N}(x, y, t)$.
- Point de départ : $\mathcal{I}(x, y, t) \approx \mathcal{I}(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t)$
- un développement de Taylor donne :

$$I_x u + I_y v + I_t \approx 0,$$

où $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ et $v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ représentent les vitesses verticale et horizontale.

Méthode de H& S

- Une séquence d'images (noir et blanc) est représentée par $\mathcal{I}(x, y, t) : \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
- Γ est un domaine rectangulaire $\Gamma = [0, \bar{X}] \times [0, \bar{Y}] \times [0, \bar{T}]$ où \bar{X} , \bar{Y} et \bar{T} sont des constantes positives.
- Hypothèse : $\mathcal{I}(x, y, t) = \mathcal{I}(x, y, t) + \mathcal{N}(x, y, t)$.
- Point de départ : $\mathcal{I}(x, y, t) \approx \mathcal{I}(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t)$
- un développement de Taylor donne :

$$I_x u + I_y v + I_t \approx 0,$$

où $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ et $v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ représentent les vitesses verticale et horizontale.

- Pour déterminer u et v la minimisation de

$$H(u, v) := \int_{\Gamma} [(I_x u + I_y v + I_t)^2 + \alpha^2 (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)] d\Gamma$$

a été proposée par Horn et Schunck.

Méthode de H& S

- Le minimum est donné par :

$$\begin{aligned}I_x^2 u + I_x I_y v &= \alpha^2 \nabla^2 u - I_x I_t \\I_x I_y u + I_y^2 v &= \alpha^2 \nabla^2 v - I_y I_t.\end{aligned}$$

Méthode de H& S

- Le minimum est donné par :

$$\begin{aligned}l_x^2 u + l_x l_y v &= \alpha^2 \nabla^2 u - l_x l_t \\l_x l_y u + l_y^2 v &= \alpha^2 \nabla^2 v - l_y l_t.\end{aligned}$$

- Avec $\nabla^2 z \approx 3(\bar{z}_{i,j,k} - z_{i,j,k})$ où

$$\begin{aligned}\bar{z}_{i,j,k} &= \frac{1}{6}(z_{i-1,j,k} + z_{i,j+1,k} + z_{i+1,j,k} + z_{i,j-1,k}) \\ &\quad + \frac{1}{12}(z_{i-1,j-1,k} + z_{i-1,j+1,k} + z_{i+1,j+1,k} + z_{i+1,j-1,k}).\end{aligned}$$

Méthode de H& S

- Le minimum est donné par :

$$\begin{aligned}l_x^2 u + l_x l_y v &= \alpha^2 \nabla^2 u - l_x l_t \\l_x l_y u + l_y^2 v &= \alpha^2 \nabla^2 v - l_y l_t.\end{aligned}$$

- Avec $\nabla^2 z \approx 3(\bar{z}_{i,j,k} - z_{i,j,k})$ où

$$\begin{aligned}\bar{z}_{i,j,k} &= \frac{1}{6}(z_{i-1,j,k} + z_{i,j+1,k} + z_{i+1,j,k} + z_{i,j-1,k}) \\ &\quad + \frac{1}{12}(z_{i-1,j-1,k} + z_{i-1,j+1,k} + z_{i+1,j+1,k} + z_{i+1,j-1,k}).\end{aligned}$$

- on obtient :

$$\begin{aligned}u^{j+1} &= \bar{u}^j - l_x \frac{l_x \bar{u}^j + l_y \bar{v}^j + l_t}{\alpha^2 + l_x^2 + l_y^2} \\ v^{j+1} &= \bar{v}^j - l_y \frac{l_x \bar{u}^j + l_y \bar{v}^j + l_t}{\alpha^2 + l_x^2 + l_y^2}\end{aligned}$$

Méthode de H& S

- Le minimum est donné par :

$$\begin{aligned}I_x^2 u + I_x I_y v &= \alpha^2 \nabla^2 u - I_x I_t \\ I_x I_y u + I_y^2 v &= \alpha^2 \nabla^2 v - I_y I_t.\end{aligned}$$

- Avec $\nabla^2 z \approx 3(\bar{z}_{i,j,k} - z_{i,j,k})$ où

$$\begin{aligned}\bar{z}_{i,j,k} &= \frac{1}{6}(z_{i-1,j,k} + z_{i,j+1,k} + z_{i+1,j,k} + z_{i,j-1,k}) \\ &\quad + \frac{1}{12}(z_{i-1,j-1,k} + z_{i-1,j+1,k} + z_{i+1,j+1,k} + z_{i+1,j-1,k}).\end{aligned}$$

- on obtient :

$$\begin{aligned}u^{j+1} &= \bar{u}^j - I_x \frac{I_x \bar{u}^j + I_y \bar{v}^j + I_t}{\alpha^2 + I_x^2 + I_y^2} \\ v^{j+1} &= \bar{v}^j - I_y \frac{I_x \bar{u}^j + I_y \bar{v}^j + I_t}{\alpha^2 + I_x^2 + I_y^2}\end{aligned}$$

- Les différences finies sont souvent utilisées pour estimer les dérivées.

Méthode de H& S

Défauts intrinsèques à cette méthode :

- luminosité constante

$$\mathcal{I}(x, y, t) \approx \mathcal{I}(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t)$$

- mouvement faible (développement de Taylor)

$$I_x u + I_y v + I_t \approx 0$$

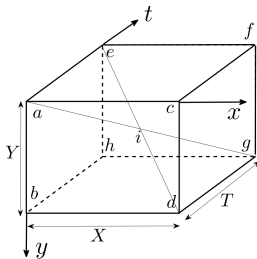
- pas de discontinuité dans le champs de mouvement (même raison que précédemment)

On va tester la méthode de H et S avec nos dérivateurs sur 2 séquences dont une satisfait les hypothèses précédentes.

Estimation des dérivées

Nous avons utilisé un estimateur affine

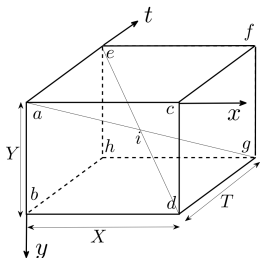
$$\sum_{l=0}^q \lambda_l(\xi) \tilde{l}_x^n(\bar{0}; \kappa_l, \mu_l; n) = \langle \mathcal{K}_q(\xi, \mathbf{x}), \partial^n I(\mathbf{X}\mathbf{x}) \rangle$$



Estimation des dérivées

Nous avons utilisé un estimateur affine

$$\sum_{l=0}^q \lambda_l(\xi) \tilde{l}_x^n(\bar{0}; \kappa_l, \mu_l; n) = \langle \mathcal{H}_q(\xi, \mathbf{x}), \partial^n I(X\mathbf{x}) \rangle$$



Estimateur utilisé :
$$l_x = -\frac{48}{X} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 Q(\xi, \eta, \tau) \times I(X\xi, Y\eta, T\tau) d\xi d\eta d\tau$$

$$Q(\xi, \eta, \tau) = (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(\lambda_3 p_3 + \lambda_4 p_4)(\lambda_5 p_5 + \lambda_6 p_6),$$

avec $p_1 = 1 - 4\xi + 3\xi^2$, $p_2 = -3\xi^2 + 2\xi$, $p_3 = 1 - \eta$, $p_4 = \eta$, $p_5 = 1 - \tau$ et $p_6 = \tau$.

Les paramètres λ_i , $i = 1, \dots, 6$ sont réels telle que :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4 = \lambda_5 + \lambda_6 = 1.$$

Les erreurs d'estimation

- Sous modélisation (étudiée précédemment)
- Erreur de discrétisation
- Erreur due au bruit

Erreur de discrétisation

- Deux méthodes de discrétisation sont employées : Simpson et Trapèzes.

Erreur de discrétisation

- Deux méthodes de discrétisation sont employées : Simpson et Trapèzes.
- Les erreurs de discrétisation sont données par :

$$I_x^{simp} = \frac{\partial}{\partial x} F + O((Xih_x)^2, (Yjh_y)^2)$$

et

$$\begin{aligned} I_x^{trap} &= \frac{6F_0(2\lambda_2 - 1)}{Xn^2} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{n^2 + 6\lambda_2 - 1}{n^2} \\ &+ \frac{\partial F}{\partial y} \frac{2Y(2\lambda_2 - 1)(\lambda_4(m^2 + 2) + m^2 - 1)}{Xm^2n^2} \\ &+ O((Xih_x)^2, (Yjh_y)^2) \end{aligned}$$

Erreur de discrétisation (suite)

- Nous sommes particulièrement intéressé par l' estimateur minimal.

Erreur de discrétisation (suite)

- Nous sommes particulièrement intéressé par l' estimateur minimal.
- Pour le minimal : l'erreur de discrétisation se réduit à :

$$I_x^{trap} = \frac{n^2 + 2}{n^2} \frac{\partial F}{\partial x} + O((Xih_x)^2, (Yjh_y)^2).$$

Erreur de discrétisation (suite)

- Nous sommes particulièrement intéressé par l' estimateur minimal.
- Pour le minimal : l'erreur de discrétisation se réduit à :

$$I_x^{trap} = \frac{n^2 + 2}{n^2} \frac{\partial F}{\partial x} + O((Xih_x)^2, (Yjh_y)^2).$$

- **Conclusion** : Multiplier l'estimateur minimal par

$$\beta = \frac{n^2}{n^2 + 2}$$

Robustesse vis-à-vis du bruit

- L'estimateur minimal est le moins sensible au bruit (ce qui explique ce qui a été annoncé à la diapositive précédente)

Robustesse vis-à-vis du bruit

- L'estimateur minimal est le moins sensible au bruit (ce qui explique ce qui a été annoncé à la diapositive précédente)
- **Conclusion** : Utiliser l'estimateur minimal le plus souvent.

Robustesse vis-à-vis du bruit

- L'estimateur minimal est le moins sensible au bruit (ce qui explique ce qui a été annoncé à la diapositive précédente)
- **Conclusion** : Utiliser l'estimateur minimal le plus souvent.
- En plus, on peut montrer que

$$V_{I_x}^{trap} < V_{I_x}^{simp}.$$

où V représente la variance du signal dérivée.

Robustesse vis-à-vis du bruit

- L'estimateur minimal est le moins sensible au bruit (ce qui explique ce qui a été annoncé à la diapositive précédente)
- **Conclusion** : Utiliser l'estimateur minimal le plus souvent.
- En plus, on peut montrer que

$$V_{I_x}^{trap} < V_{I_x}^{simp.}$$

où V représente la variance du signal dérivée.

- **Conclusion générale** : utiliser le minimal, le discrétiser à l'aide des trapèzes et multiplier par β .
- le plus souvent \Rightarrow loin des bords de la séquences
- Sur les bords : utiliser des estimateurs non minimaux discrétisés à l'aide de la méthode de Simpson.

Encore un truc et c'est fini !

$$\begin{aligned}\bar{z}_{i,j,k} &= \frac{1}{6}(z_{i-1,j,k} + z_{i,j+1,k} + z_{i+1,j,k} + z_{i,j-1,k}) \\ &\quad + \frac{1}{12}(z_{i-1,j-1,k} + z_{i-1,j+1,k} + z_{i+1,j+1,k} + z_{i+1,j-1,k}). \quad (1)\end{aligned}$$

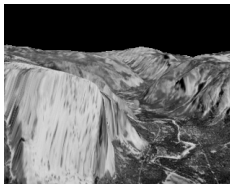
$$u^{j+1} = \bar{u}^j - l_x \frac{l_x \bar{u}^j + l_y \bar{v}^j + l_t}{\alpha^2 + l_x^2 + l_y^2}$$

$$v^{j+1} = \bar{v}^j - l_y \frac{l_x \bar{u}^j + l_y \bar{v}^j + l_t}{\alpha^2 + l_x^2 + l_y^2}$$

- Nous avons utilisé une moyenne sur une fenêtre de taille plus grande que celle utilisée en (1)

Simulations : 2 séquences

- Yosemite



- Rubber Whale



Simulations : Yosemite

TABLE: Yosemite , paramètre de régularisation $\alpha = 30$. 1000 itérations.

SNR dB	C-HS		G-HS		AND-HS	
	AAE	STD	AAE	STD	AAE	STD
∞	21.84	16.64	7.68	2.85	2.63	1.8
40	22.53	16.73	7.74	2.88	2.64	1.8
30	27	18.05	8.14	3.17	2.85	1.84
25	31.45	19.32	8.87	3.66	3.72	2.1
20	37.88	20.86	11.56	5.35	6.29	3.7
15	44.62	21.16	17.86	9.38	12.69	8.47
10	50.21	23.37	30.63	17.02	23.83	14.83

SNR	∞	30	20	10
M1	21.84	26.56	38	49.86
	16.64	17.78	21.05	23.25
M2	19.67	24.4	36.05	49.86
	13.7	15.49	19.7	22.56
M3	6.68	7	11.01	28.66
	2.67	2.84	5.6	15.75
M4	5.99	6.17	9.34	24.88
	2.06	2.28	4.03	12.86
M5	5.29	5.93	11.91	32.21
	2.64	2.96	6.51	18.39
M6	3.51	4.22	9.38	29.74
	2.34	2.61	5.53	16.92
M7	4.58	4.96	9.46	26.98
	2.18	2.3	4.94	14.27
M8	2.59	3	6.72	24.6
	1.78	1.89	3.9	13.36

Simulations : Yosemite

TABLE: Yosemite

SNR dB	n	m	n_1	m_1	iterations	α	AAE	STD
∞	5	5	5	5	2000	50	2.68	1.74
∞	5	5	7	7	2000	50	2.54	1.73
20	5	5	5	5	2000	50	6.82	3.76
20	5	5	7	7	2000	50	5.11	2.78
20	7	7	7	7	2000	50	4.16	2.24
20	7	7	7	7	4000	50	3.7	2.3
10	7	7	7	7	5000	50	13.68	5.95
10	7	7	7	7	5000	60	12.01	6.69

- Taille de la fenêtre d'estimation des dérivées
- Taille de la fenêtre d'estimation de \bar{u} et \bar{v}

Simulations : Yosemite

TABLE: Comparaison avec une méthode récente

SNR	Classic		Classic-C		Classic-L		B&A		clas
	AAE	STD	AAE	STD	AAE	STD	AAE	STD	AAE
∞	5.35	5.95	3.05	3.25	3.89	3.94	3.89	3.94	3.06
20	12.49	9.55	7.15	5.56	6.61	6.25	6.43	4.95	6.99
10	24.17	16.31	19.97	15.47	13.98	10.33	14.8	11.94	14.81

Simulations : Rubber Whale

n	m	n_1	m_1	AAE	STD
3	3	3	3	9.97	16.27
3	3	5	5	9.52	16.02
3	3	7	7	9.75	15.9
5	5	3	3	11.27	16.44
5	5	5	5	10.91	17
5	5	7	7	11.41	17.55
7	7	7	7	15.37	19.25

- Taille de la fenêtre d'estimation des dérivées
- Taille de la fenêtre d'estimation de \bar{u} et \bar{v}

Conclusions

- Il semble que nos résultats sont compétitifs sur une séquence qui satisfait les contraintes du modèle de départ de H et S :
 - luminosité constante
 - mouvement faible
 - pas de discontinuité dans le champs de mouvement
- De résultats moins bon sont obtenus sur une séquence qui ne satisfait pas ces contraintes.
- **Perspective** Coupler les dérivateurs avec des méthodes d'estimation de mouvement plus sophistiqués (multirésolution, pénalités non quadratiques.).